



Л. В. Васильєва, І. А. Гетьман

**ВИКОРИСТАННЯ
КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ
ЗАДАЧ В ЕКОНОМІЦІ**

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Донбаська державна машинобудівна академія

Л. В. Васильєва, І. А. Гетьман

ВИКОРИСТАННЯ
КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ
ЗАДАЧ В ЕКОНОМІЦІ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 7 від 28.02.2008

Краматорськ 2011

УДК 519.852
ББК 22.18
В 19

Рецензенти:

Зорі А. А., д-р техн. наук, проф., зав. каф. електронної техніки
Донецького національного технічного університету;

Чабаненко В. В., д-р фіз.-мат. наук, зав. відділу Донецького фізико-
технічного інституту НАН України;

Горшков В. П., канд. техн. наук, проф. каф. вищої математики
та інформаційних технологій Донецького університету економіки та права.

Васильєва, Л. В.

В 19 Використання комп'ютерних технологій для розв'язання оптиміза-
ційних задач в економіці : навчальний посібник для студентів вищих
навчальних закладів / Л. В. Васильєва, І. А. Гетьман. – Краматорськ :
ДДМА, 2011. – 200 с.
ISBN 978-966-379-511-9.

Містить шість лабораторних і одну самостійну роботу за темами: запис задачі
лінійного програмування; геометричний зміст і графічне розв'язання формалізо-
ваної двовимірної задачі ЛП; двоїстість в задачах ЛП; визначення оптимального
асортименту; оптимальна суміш; транспортна задача; задачі, що зводяться до
транспортної; міжгалузевий баланс, нелінійна оптимізаційна задача.

Посібник може бути корисним для тих, хто бажає самостійно опанувати методи
розв'язання оптимізаційних задач у системі Maple, Excel for Windows, MathCAD.

УДК 519.852
ББК 22.18

ISBN 978-966-379-511-9

© Л. В. Васильєва,
І. А. Гетьман, 2011
© ДДМА, 2011

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 ПРЕДМЕТ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»	7
2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	9
3 МАТРИЧНИЙ ЗАПИС ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ...	11
3.1 Приклад запису задачі лінійного програмування в матричному вигляді	12
4 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	14
4.1 Різні випадки, що зустрічаються при розв'язанні задач лінійного програмування	16
5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	19
5.1 Приклад графічного розв'язання формалізованої двовимірної задачі лінійного програмування.....	19
5.3 Розв'язання задачі лінійного програмування в пакеті Maple	24
5.4 Завдання до лабораторної роботи 1	27
6 ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ.....	29
6.1 Поняття двоїстості.....	29
6.2 Типи задач лінійного програмування	29
6.3 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі стандартного виду ..	30
6.4 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі канонічного виду	31
6.5 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі загального виду	31
6.6 Приклад побудови двоїстої задачі для задачі загального типу	32
6.7 Основні твердження про взаємно двоїсті задачі.....	34
6.7.1 Перша теорема двоїстості	34
6.7.2 Друга теорема двоїстості.....	34
6.8 Економічний зміст двоїстої задачі.....	35
7 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ	37
7.1 Задача визначення оптимального асортименту (планування виробництва)	37
7.2 Завдання до лабораторної роботи 2	38
7.3 Приклад виконання лабораторної роботи 2	39
7.4 Економічний висновок	41
7.5 Побудова двоїстої задачі до задачі планування виробництва.....	41
7.6 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple	45
7.7 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 2	46

8 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. ОПТИМАЛЬНА СУМІШ	49
8.1 Теоретичні відомості.....	49
8.2 Завдання до лабораторної роботи	50
8.3 Приклад виконання лабораторної роботи 3	51
8.4 Побудова двоїстої задачі до задачі про оптимальну суміш	52
8.5 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple.....	54
8.6 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 3	56
9 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	61
9.1 Загальне формулювання транспортної задачі	61
9.2 Задачі, що зводяться до транспортних	63
10 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА	66
10.1 Завдання до лабораторної роботи 4.....	66
10.2 Приклад виконання лабораторної роботи 4	67
10.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 4	74
11 ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ	76
11.1 Задача типу 1: a_{ij} – витрати продукції	76
11.2 Задача типу 2: a_{ij} – витрати в грошовому вираженні.....	77
12 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ	79
12.1 Завдання до лабораторної роботи 5.....	79
12.2 Приклад виконання лабораторної роботи 5	80
12.2.4 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple	84
12.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 5	84
13 ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ	89
13.1 Теоретичні відомості.....	89
13.2 Приклад розв'язання задачі нелінійного програмування в пакеті Maple	92
14 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	97
14.1 Завдання до лабораторної роботи 6.....	97
14.2 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 6	97
15 САМОСТІЙНА РОБОТА.....	100
15.1 Завдання до самостійної роботи	100
15.2 Індивідуальні завдання до самостійної роботи.....	100
Варіант 7	107
16 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ.....	118
17 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	146
18 ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ З КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ.....	147

ДОДАТОК А. ПАКЕТ MAPLE	150
1 Декотрі дані про роботу в пакеті Maple	150
2 Команди «=» і «:=». Відміна присвоювання	150
3 Функція користувача. Обчислення значень функції	151
4 Побудова графіка функції	151
5 Текст на графіку	154
6 Сполучення графіків і написів	154
7 Побудова графічного розв'язку системи нерівностей	155
8 Розв'язання рівнянь, нерівностей і систем рівнянь і нерівностей	156
9 Знаходження максимуму (мінімуму) лінійної функції	157
10 Знаходження екстремумів функцій у пакеті Maple	158
ДОДАТОК Б. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ПАКЕТІ EXCEL FOR WINDOWS	159
1 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 1	159
2 Графічне розв'язання задачі ЛП	161
3 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 2	163
4 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 3	166
5 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 4	169
6 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 5	175
7 Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи 6	178
ДОДАТОК В. ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТА MATHCAD	180
1 Загальні положення пакета MathCad	180
2 Прості арифметичні обчислення	182
3 Табулювання функцій	183
4 Форматування результатів	184
5 Побудова графіків функцій у декартовій системі координат	185
6 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 1	188
7 Графічне розв'язання задачі ЛП	189
8 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 2	190
9 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 4	192
10 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 5	195
11 Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи 6	197
ЛІТЕРАТУРА	198

ВСТУП

Сучасний економіст повинен знати і вміти використовувати в повсякденній роботі новітні економіко-математичні методи і моделі.

Традиційний спосіб вивчення економіко-математичних моделей полягав у визначенні їхнього призначення і суті, в освоєнні техніки «ручної» реалізації. Щоб зробити доступною «ручну» реалізацію, об'єм оброблюваних даних доводилося максимально скорочувати. З одного боку, це найчастіше віддаляє побудовану модель від реальності, а з іншого боку – знижує ефективність застосування досліджуваних методів.

Використання комп'ютерних технологій звільняє економістів від необхідності спрощувати економічні моделі, рятує їх від рутинної обчислювальної роботи з реалізації математичних методів, дозволяє сконцентрувати увагу не на алгоритмі обчислення, а безпосередньо на аналізі результатів моделювання. Очевидно, що ефективність вивчення предмета стає істотно вищою, якщо в економіста є можливість самостійно швидко «програти» варіанти моделей, змінити їхні параметри, порівнявши в графічній і числовій формі результати використання декількох методів.

Однак жодна комп'ютерна технологія ні в даний час, ні в доступному для огляду майбутньому не в змозі вирішити довільно сформульовану змістовну задачу з будь-якого розділу математики, економіки або техніки. Ця процедура формалізації задачі і є творчою складовою процесу розв'язання будь-якої задачі, що в даний час доступна тільки людині.

Тому даний навчальний посібник побудовано на таких принципах:

- виклад коротких теоретичних відомостей, необхідних для розуміння процесу формалізації задач лінійного програмування;
- розгляд процесу формалізації для визначених класів задач у загальному вигляді і на конкретних прикладах.
- індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів;
- загальні принципи і приклади використання різних комп'ютерних технологій для розв'язання формалізованих задач.

У цьому посібнику задачі розв'язуються за допомогою програм **Maple**, **Excel for Windows** і **MathCad**.

У додатку **А** розглянуто правила та команди роботи в пакеті **Maple**. Для кожної лабораторної роботи наведено приклад розв'язання задачі. Це допоможе оволодіти основами роботи з пакетом.

У додатку **Б** розглянуто правила та команди роботи в **Excel for Windows**. Для кожної лабораторної роботи наведено приклад розв'язання задачі.

У додатку **В** розглянуто правила та команди роботи в пакеті **MathCad**. Для кожної лабораторної роботи наведено приклад розв'язання задачі.

1 ПРЕДМЕТ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

В економічній практиці доволі часто виникають такі питання:
як організувати виробництво продукції, щоб отримати максимальний прибуток, у той же час не перебільшити затрати існуючих ресурсів;
як із мінімальними затратами з наявних видів сировини одержати шляхом змішування новий продукт (наприклад: бензин, металевий сплав і т. ін.) із заданими технічними й іншими характеристиками;
як організувати доставку товарів чи сировини в декілька пунктів з найменшими затратами та ін.

Таким чином, у практиці економічного планування на будь-якому його рівні виникає необхідність вибору оптимального варіанта серед різних варіантів плану.

Однак, як правило, інтуїція і досвід планування виявляються тут недостатніми. Тому в плануванні необхідні точні методи, що дають можливість зіставляти різні варіанти плану й обирати оптимальний варіант. Один із методів, що полегшує перебір оптимальних варіантів плану, це так зване математичне програмування.

Математичне програмування – розділ математики, що розробляє теорію і чисельні методи розв’язання задач на екстремум функції багатьох змінних з обмеженнями на область зміни цих змінних.

Термін «програмування» (від англійського «programming» – складання плану або програми дій) тут треба розуміти як «пошук найкращих планів», на відміну від того тлумачення, яке прийняте спеціалістами з програмного забезпечення – складання програм для ПЕОМ.

При вивченні математичного програмування потрібне знання загального курсу вищої математики, математичної статистики і математичного апарату для розв’язання задач економіки і планування, а також вміння користуватися ПЕОМ. Оскільки цей навчальний посібник орієнтований на студентів і аспірантів економічних спеціальностей, які у своїй діяльності зустрічаються з математичними методами як користувачі, далі будуть наведені тільки короткі теоретичні відомості, а більше уваги приділено практичним задачам.

Основні поняття, якими оперує математичне програмування

Функцію, екстремальне значення якої треба знайти в умовах заданих економічних можливостей, називають **цільовою функцією** або **критерієм оптимальності**.

Економічні можливості записуються (формалізуються) у вигляді **системи обмежень**.

Сукупність невідомих величин $(x_1, \dots, x_n)$, змінюючи які можна вдосконалювати систему, називають **планом задачі**.

Наведені вище поняття складають математичну модель задачі.

Математична модель – відображення реального економічного процесу або об'єкта засобами математики (у вигляді функцій, рівнянь, нерівностей і т. ін.).

Запис загального вигляду математичної моделі

Знайти план $x = (x_1, \dots, x_n)$, який досягає екстремального значення цільової функції F , тобто

$$F = F(x_1, \dots, x_n)$$

при заданих обмеженнях

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = 1..m.$$

Зазвичай з економічних міркувань $x_j \geq 0, j = 1..n$.

Задачі математичного програмування класифікують у залежності від особливостей цільової функції і системи обмежень.

Якщо цільова функція $F(x)$ і функції $\varphi_i(x)$, $i = 1..m$ є лінійними, то це задача лінійного програмування (ЛП).

Якщо хоча б одна з функцій, що входять в математичну модель $(F(x), \varphi_i(x))$, не лінійна, то це задача нелінійного програмування (НЛП).

Якщо хоча б одна зі змінних за умовою задачі повинна бути цілим числом, то це задача цілочислового програмування (ЦП).

Якщо параметри цільової функції і/або системи обмежень змінюються у часі, то такі задачі вирішують за допомогою методів динамічного програмування (ДП).

Методи розв'язання наведених вище задач оперують з детермінованими математичними моделями, які відображують поведінку об'єкта з позицій повної визначеності в сучасному і майбутньому.

Якщо параметри, що входять у цільову функцію або функції-обмеження, є випадковими величинами, або треба приймати розв'язання в умовах неповної і недостовірної інформації, то говорять про стохастичне програмування (СП).

Задачі, у яких треба знайти розв'язок за кількома цільовими функціями, називають задачами багатокритеріальної оптимізації.

2 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Для початку розглянемо розділ математичного програмування – лінійне програмування, де розглядаються тільки лінійні функції, що спрощує знаходження розв’язання.

Сутність лінійного програмування в загальному вигляді

Є n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$. Визначити максимум (чи мінімум) наступної лінійної функції, яку називають цільовою функцією, цих змінних:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n. \quad (1)$$

При розв’язанні задачі на максимум економічний зміст функції F може бути таким:

x_i – кількість виробів, що випускаються, i -го виду, $i = 1, \dots, n$;

c_i – ціна одиниці виробу i -го виду, $i = 1, \dots, n$;

F – сумарна ціна виробів, що випускаються.

При розв’язанні аналогічної задачі на мінімум: c_i – виробничі витрати (у грошовому вираженні) на одиницю виробу, що випускається, i -го виду, $i = 1, \dots, n$; F – сумарні витрати.

Пошук екстремуму цільової функції F пов’язаний з необхідністю мінімізувати витрати (грошові, сировинні) чи максимізувати прибуток, вартість зробленої продукції і т. ін. При цьому повинні задовольнятися такі умови, що називаються системою лінійних обмежень (СОБ) задачі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases} \quad (2)$$
$$x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Умови СОБ (2) відображують обмеженість наявних ресурсів (матеріальних, грошових, часових, виробничих потужностей і т. п.).

Вектор $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненти якого задовольняють обмеженням задачі, будемо називати планом або припустимим розв’язанням задачі лінійного програмування.

Усі припустимі розв’язання утворюють область розв’язання задачі лінійного програмування.

Припустиме розв’язання, що максимізує (мінімізує) цільову функцію, називається оптимальним планом задачі.

Розв'язання такого роду задач і складає предмет лінійного програмування. Термін «лінійне програмування» вказує, що розв'язання полягає у визначенні оптимального плану, причому в математичному вираженні цих задач фігурують тільки лінійні рівняння і лінійні нерівності.

Розв'язання задачі лінійного програмування складається з трьох основних етапів:

- а) складання математичної моделі (формалізація задачі);
- б) розв'язання формалізованої задачі;
- в) аналіз отриманого оптимального розв'язання.

Формалізація задачі починається з вибору змінних, сукупність числових значень яких однозначно визначає один з варіантів плану. При цьому варто мати на увазі, що в більшості випадків від вдалого вибору цих змінних залежить простота моделі і, отже, зручність подальшого її аналізу. Після вибору змінних необхідно скласти за текстом задачі систему обмежень, якій ці змінні повинні задовольняти. При цьому потрібно стежити, щоб у модель були включені всі обмежувальні умови й, у той же час, не було жодного зайвого обмеження або обмеження, записаного в неадекватній формі (тобто не слід писати в СОБ знак «<» замість « $\leq$ » і навпаки).

Нарешті, складається цільова функція, що в математичній формі відображує критерій вибору кращого варіанта.

Метод розв'язання формалізованої задачі залежить від її розмірності. Якщо кількість змінних дорівнює двом ($n = 2$), то задача називається плоскою і може бути вирішена графічно. Контроль правильності розв'язання в даному випадку варто проводити, вирішуючи задачу на ЕОМ. Для багатомірних задач ($n \geq 3$) графічний метод розв'язання не можна застосовувати. У цьому випадку і розв'язання задачі, і контроль правильності розв'язання виконується за допомогою ПЕОМ.

3 МАТРИЧНИЙ ЗАПИС ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Задачу лінійного програмування зручно подати в матричній формі. Визначимо основні поняття.

Матриця $\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – таблиця, що складається

з m рядків і n стовпців; $m \times n$ – розмірність матриці.

Вектор $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – стовпець з n елементів, його можна подати як ма-

трицю $X(n \times 1)$.

Деякі дії над матрицями

1 Транспонування

Транспонована матриця $\mathbf{A}^T$ отримана з матриці $\mathbf{A}$ заміною рядків на стовпці:

$$\mathbf{A}^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця-рядок $(y_1 \ \dots \ y_n)$ може бути подана як транспонований вектор-стовпець $\bar{Y}^T = (y_1 \ \dots \ y_n)$.

2 Порівняння матриць

Порівнюються матриці однакової розмірності.

Дві матриці називаються рівними, якщо в них рівні відповідні елементи: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$.

Матриця $\mathbf{A}$ не більше матриці $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$), якщо для всіх елементів матриць виконується нерівність $a_{ij} \leq b_{ij}$.

3 Множення матриць

Скалярний добуток векторів:

$$\bar{Y}^T \cdot \bar{X} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n = \sum_{i=1}^n y_i x_i.$$

Множення можливе лише для матриць, що мають таку властивість: кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці: $\underset{n \times p}{\mathbf{A}} \cdot \underset{p \times m}{\mathbf{B}} = \underset{n \times m}{\mathbf{C}}$.

Елемент матриці c_{ij} – скалярний добуток i -ого рядка матриці $\mathbf{A}$ на j -й стовпець матриці $\mathbf{B}$.

На основі цих понять запишемо задачу лінійного програмування в матричному вигляді.

Дана задача:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (\max);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_i \geq 0 \quad (i=1, \dots, n). \end{cases}$$

У матричному вигляді ця задача запишеться так:

$$F = \bar{\mathbf{C}}^T \cdot \bar{\mathbf{X}} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}} \leq \bar{\mathbf{B}},$$

$$\bar{\mathbf{X}} \geq \bar{\mathbf{0}}.$$

3.1 Приклад запису задачі лінійного програмування в матричному вигляді

Маємо формалізовану задачу лінійного програмування.

$$F = 5x_1 + 3x_2 - x_3 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Перш ніж переходити до матричного запису, перетворимо задачу так, щоб у системі обмежень усі нерівності були одного знака. Якщо для цільової функції шукають максимум, то обмеження повинні мати знак « $\leq$ ».

Ті нерівності, у яких знак « $\geq$ », помножимо на (-1). Одержимо задачу:

$$F = 5x_1 + 3x_2 - x_3 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq -9, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Випишемо вектори і матрицю:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

У матричному вигляді:

$$F = \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A} \cdot \bar{X} \leq \bar{B},$$

$$\bar{X} \geq \bar{0}.$$

4 ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

У випадку, коли в задачі фігурують тільки дві змінні, задача лінійного програмування може бути вирішена геометричним способом.

Дано систему m лінійних нерівностей із двома невідомими x_1, x_2 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Дано лінійну функцію:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad (4)$$

Причому

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5)$$

Потрібно серед усіх розв'язків системи (3), (5) знайти таке, яке максимізує функцію (4).

Системи обмежень (3) і (5) задають на площині опуклий багатокутник M , причому умови (5) свідчать про те, що він розташований у першій чверті (рис. 1). Цей багатокутник називається областю розв'язків задачі.

Зауваження: при неправильно сформульованій задачі область розв'язків може виявитися порожньою або необмеженою.

Отже, задача може бути сформульована так: серед усіх точок області M знайти таку, координати якої максимізують функцію F .

Доведено, що функція (4) не може досягати екстремального значення в жодній внутрішній точці області M , значить розв'язок задачі (4) при умовах (3) і (5) варто шукати на границі цієї області.

Якщо дорівняти вираження для функції F якій-небудь постійний C :

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = C, \quad (6)$$

то одержимо рівняння прямої лінії, у точках якої функція F набуває того самого фіксованого значення C .

Відомо, що значення функції F зростають у напрямку вектора градієнта:

$$\overrightarrow{\text{grad } F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2),,$$

і спадають у напрямку, протилежному напрямку градієнта.

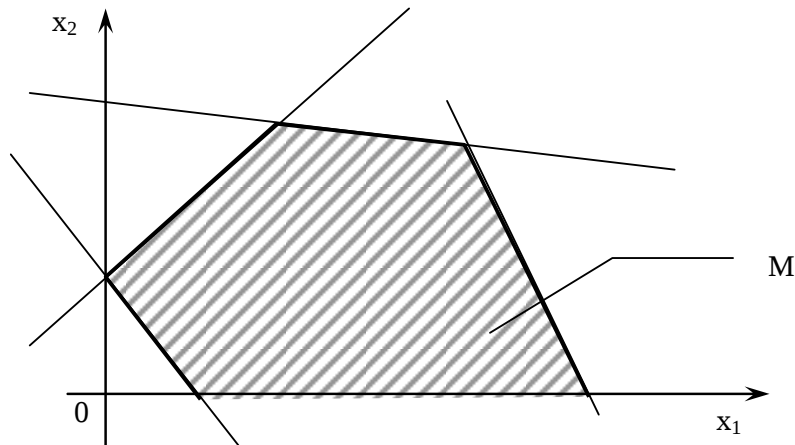


Рисунок 1 – Область розв'язків системи лінійних обмежень

Виходить, остання точка області, яку перетинає пряма (6) при русі в напрямку градієнта, є точкою максимуму (т. К, рис. 2).

Остання точка області, яку перетинає пряма (6) при русі в напрямку, протилежному напрямку градієнта, є точкою мінімуму (т. N, рис. 2).

Координати оптимальної точки знаходимо, розв'язуючи систему рівнянь прямих, що перетинаються в цій точці.

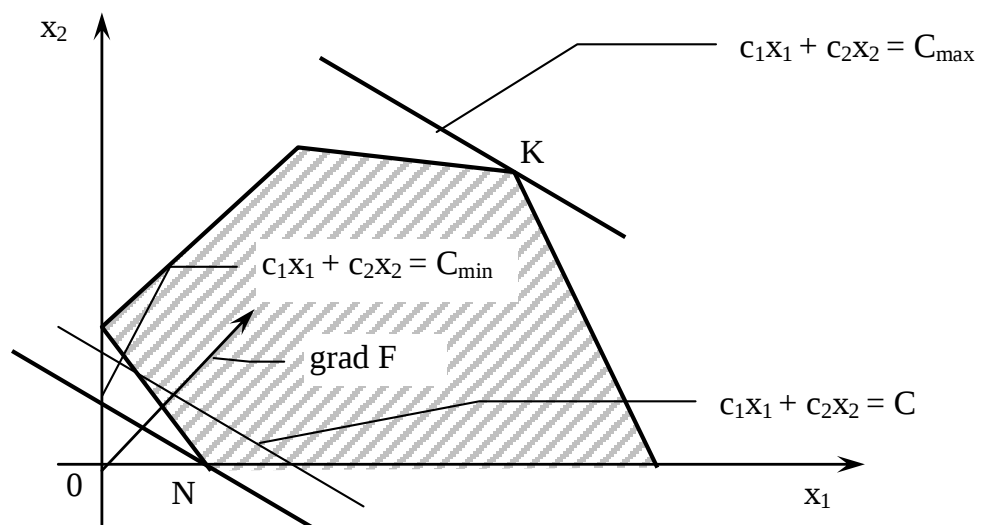


Рисунок 2 – Знаходження максимуму і мінімуму цільової функції графічним методом

4.1 Різні випадки, що зустрічаються при розв'язанні задач лінійного програмування

Передбачається, що область D , обумовлена СОБ, не порожня.

1 Область D – обмежена. Розв'язок існує і єдиний (рис. 3).

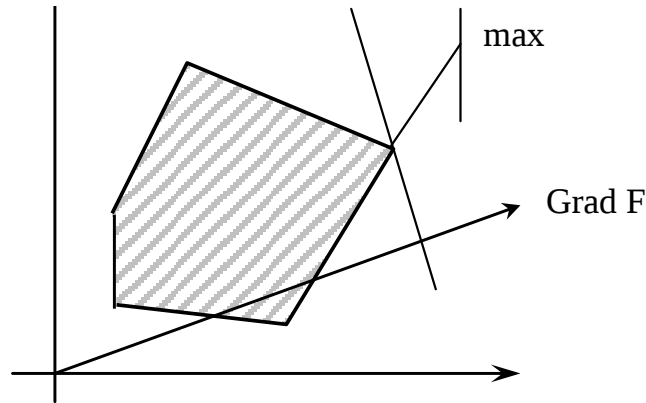


Рисунок 3

2 Область D – необмежена. Розв'язок (max) існує і єдиний (рис. 4).

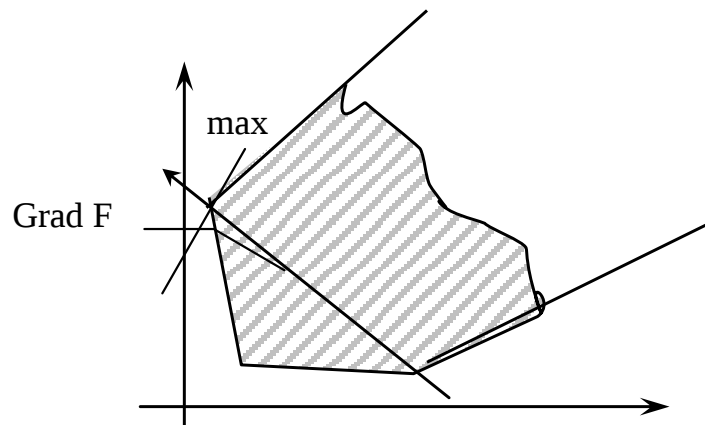


Рисунок 4

3 Область D – обмежена, градієнт – перпендикулярний стороні M_1M_2 . У цьому випадку існує нескінченна безліч розв'язків, що складаються з координат точок відрізка $[M_1, M_2]$ (рис. 5).

4 Область D – необмежена, цільова функція – необмежена. Розв'язок не існує (рис. 6).

5 Особливий випадок складають так звані погано обумовлені задачі, коли пряма $F = c_1x_1 + c_2x_2$ майже співпадає з однією зі сторін багатокутника. Тоді найменша похибка у визначенні коефіцієнтів приводить до дуже великої похибки у відповіді (рис. 7).

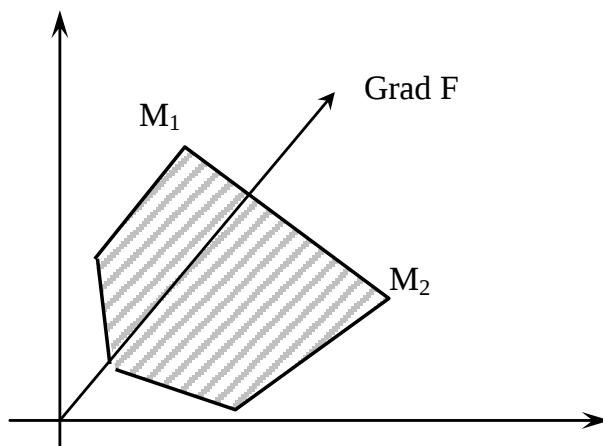


Рисунок 5

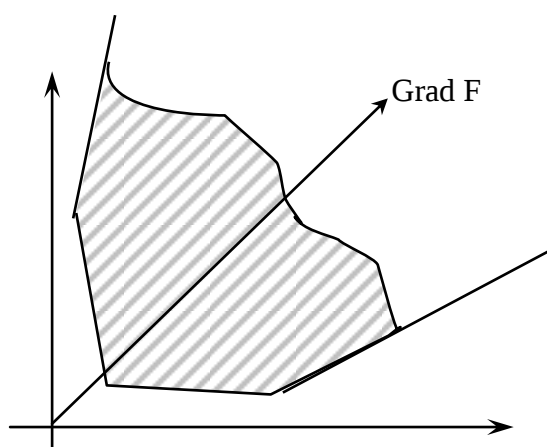


Рисунок 6

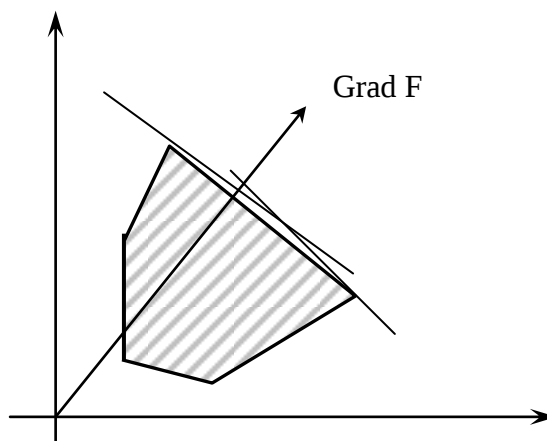


Рисунок 7

Існують спеціальні алгоритми для розв'язання погано обумовлених задач. Для перевірки, чи не є ваша задача погано обумовленою, потрібно розв'язати її двічі: один раз – з її коефіцієнтами $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, а другого

разу – з коефіцієнтами, злегка зміненими, $C = (c_1 + e_1, c_2 + e_2, \dots, c_n + e_n)$. Якщо задача не є погано обумовленою, то зміни у відповіді того ж порядку, що і для коефіцієнтів (наприклад, $\sim 1\%$). Якщо ж задача погано обумовлена, то, змінивши в умові c_i на кілька відсотків, одержимо відповідь, що відрізняється від вихідної на десятки або навіть сотні відсотків.

Зауваження. У випадку задачі трьох і більше невідомих із принципової сторони справа обстоїть зовсім так само, як у випадку двох невідомих. Однак вже у випадку з тривимірною задачею, як правило, геометричне тлумачення задачі не може бути основою для її розв'язання. У кращому випадку воно відіграє допоміжну роль. Однак якісно картина не змінюється, тобто розв'язання задачі може бути єдиним, задача може мати нескінченну безліч рішень, розв'язання задачі може бути необмеженим.

5 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1. ГРАФІЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Тема. Запис задачі лінійного програмування в матричній формі. Графічне розв'язання задачі.

Мета: *набути вмінь запису задачі лінійного програмування в матричній формі; вибору методу розв'язання формалізованої задачі; побудови області припустимих розв'язків; знаходження за графіком оптимального значення цільової функції; засвоїти такі поняття: оптимальний план, припустиме розв'язання, цільова функція, система обмежень, область припустимих розв'язків, добре і погано обумовлені задачі.*

Робота розрахована на 8 годин.

5.1 Приклад графічного розв'язання формалізованої двовимірної задачі лінійного програмування

Перш ніж розглянути приклад графічного розв'язання задачі лінійного програмування, розглянемо графічне розв'язання нерівності і системи нерівностей.

Графічне розв'язання нерівності

Приклад 1

Нехай є нерівність $x_1 + 2x_2 \leq 4$.

Розв'яжемо цю нерівність графічно.

1 Побудуємо на площині рівняння прямої, що відповідає нерівності $x_1 + 2x_2 = 4$. Для побудови прямої досить знати дві довільні точки, що належать цій прямій. Знайдемо ці точки.

Для цього візьмемо довільне значення x_1 , наприклад $x_1 = 0$, та підставимо у рівняння. Тоді $0 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$. Перша точка – $(0; 2)$. Візьмемо друге x_1 , наприклад $x_1 = 4$, та підставимо у рівняння. Тоді $4 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 0$. Друга точка – $(4; 0)$. Маємо дві точки на координатній площині, через які проводимо пряму (рис. 8).

x_1	x_2
0	2
4	0

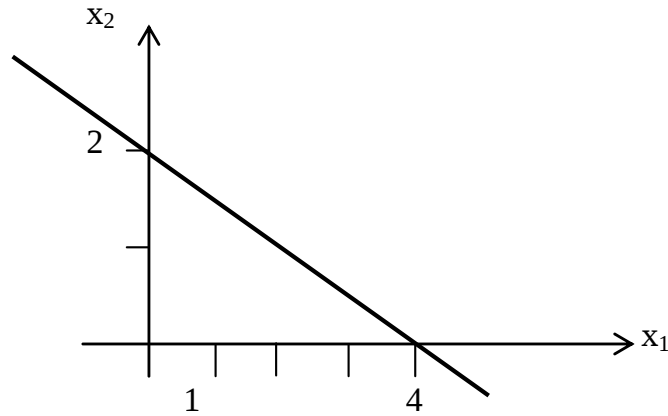


Рисунок 8

2 Пряма розбиває площину на дві напівплощини. Розв'язком нерівності є одна з напівплощин. Підставимо в нерівність довільну точку площини (найпростіше – точку $(0; 0)$). Якщо нерівність вірна, то розв'язком є напівплощина, що містить цю точку. Якщо нерівність не вірна, то розв'язком є інша напівплощина. На рисунку напівплощину-розв'язок показують штрихуванням (рис. 9).

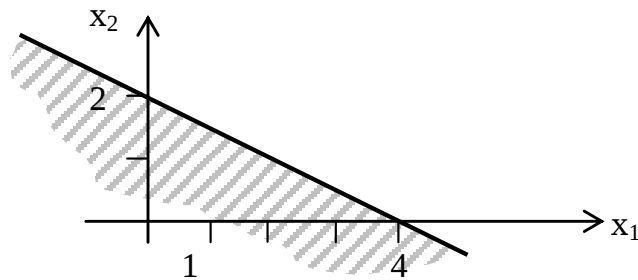


Рисунок 9

Підставимо в нашу нерівність точку $(0; 0)$: $0 \leq 4$ – вірно. Значить розв'язком нерівності буде напівплощина, що містить цю точку.

Тепер розв'яжемо графічно систему нерівностей.

Дано систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для того щоб розв'язати графічно систему нерівностей, потрібно розв'язати графічно кожну нерівність. Пронумеруємо нерівності:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 & (1), \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70 & (2), \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20 & (3), \\ x_1 \geq 0 & (4), \\ x_2 \geq 0 & (5). \end{cases}$$

Нерівності (4) і (5) показують, що область розв'язків системи знаходиться в першій чверті координатної площини.

Вирішимо графічно нерівності (1), (2) і (3). Областю розв'язків системи нерівностей буде та область площини, у якій перетинаються напівплощини розв'язків кожної нерівності. У нашому прикладі областю розв'язків системи нерівностей є багатокутник ABCDE (рис. 10).

1 $x_1 + 3x_2 = 6$.

x_1	x_2
0	2
6	0

$T.(0;0) \Rightarrow 0 \geq 6$ – невірно.

2 $7x_1 + 10x_2 = 70$.

x_1	x_2
0	7
10	0

$T. (0;0) \Rightarrow 0 \leq 70$ – вірно.

3 $4x_1 - 5x_2 = -20$.

x_1	x_2
0	4
5	8

$T. (0;0) \Rightarrow 0 \geq -20$ – вірно.

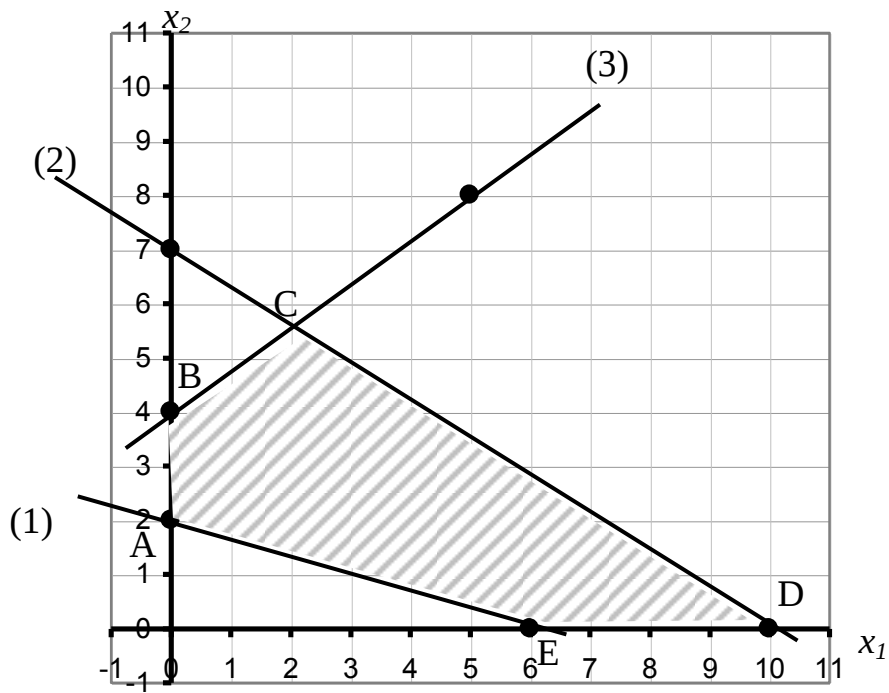


Рисунок 10 – Побудова області розв’язків системи нерівностей

5.2 Графічне розв’язання задачі лінійного програмування

Приклад 2

Нехай необхідно знайти (x_1, x_2) , при яких функція $F = 2x_1 + x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти такій системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язання

1 Будемо область розв’язків системи обмежень. Область розв’язків – багатокутник ABCDE, побудова якого відбулася раніше (рис. 11).

2 Знаходимо градієнт функції $F := \overline{\text{grad}F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (2; 1)$.

Будуємо вектор з початком у точці (0; 0) і кінцем у точці (2; 1).

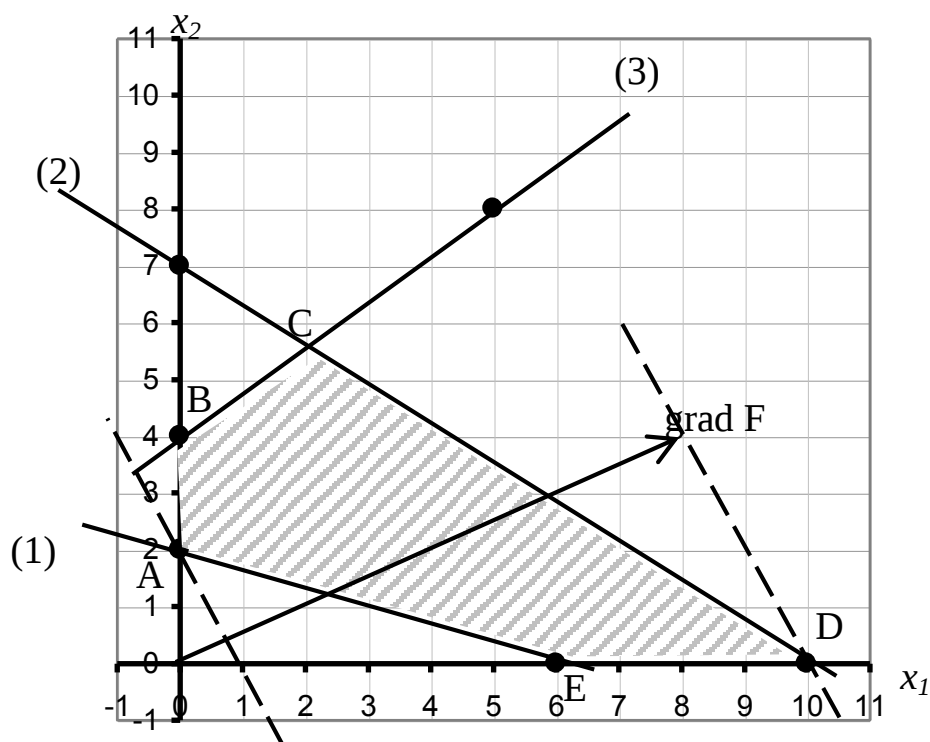


Рисунок 11 – Приклад графічного розв'язання задачі лінійного програмування

Примітка. Вектор можна збільшувати чи зменшувати пропорційно:
 $\overline{\text{grad}F} = (2; 1) = (8; 4)$.

3 Будуємо пряму, перпендикулярну вектору градієнта. Пересуваємо цю пряму в напрямку, зазначеному вектором. Остання точка області, яку перетинає пряма, і є точкою максимуму. У даному випадку це точка D.

4 Знаходимо координати точки максимуму Ця точка лежить на перетині прямих (2) і $x_2 = 0$. Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 = 70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Одержали: $x_{1\max} = 10$; $x_{2\max} = 0$.

5 Визначимо максимальне значення цільової функції:

$$F_{\max} = 2 \cdot 10 + 0 = 20.$$

Відповідь: максимального значення $F = 20$ цільова функція досягає в точці (10; 0).

Розглянемо іншу задачу:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + x_2 \quad (\min), \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \end{cases} \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Задача відрізняється від попередньої тим, що необхідно знайти такі (x_1, x_2) , при яких функція F досягає мінімуму при даній системі обмежень.

Розв'язання повторює попереднє, крім такого моменту: пряму пересувають у напрямку, протилежному до зазначеного вектором.

Для цього прикладу мінімум досягається в точці A . Ця точка лежить на перетині прямих (1) і $x_1 = 0$. Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Одержали: $x_{1\min} = 0$; $x_{2\min} = 2$.

Визначимо мінімальне значення цільової функції:

$$F_{\min} = 2 \cdot 0 + 2 = 2.$$

Відповідь: мінімального значення $F = 2$ цільова функція досягає в точці $(0; 2)$.

5.3 Розв'язання задачі лінійного програмування в пакеті Maple

Примітка. Команди виділені **напівжирним** шрифтом, пояснення змісту команд – звичайним шрифтом, результати виконання команд – *курсивом*.

Побудуємо спочатку область розв'язків СОБ.

Команда очищення пам'яті:

> restart;

Вводимо функцію та нерівності з СОБ

> F:=2*x1+x2;

$$F := 2 x_1 + x_2$$

```
> g1:=x1+3*x2>=6; g2:=7*x1+10*x2<=70; g3:=4*x1-5*x2>= -20;
      g1 := 6 ≤ x1 + 3 x2
      g2 := 7 x1 + 10 x2 ≤ 70
      g3 := -20 ≤ 4 x1 - 5 x2
```

Команди підключення бібліотек розширеної графіки:

```
> with(plots):
```

Команда побудови області розв'язків:

```
> ris1:=inequal({g1,g2,g3,x1>=0,x2>=0}, x1=0..10,x2=0..10,
optionsexcluded=(color=white));
> ris1;
```

Результат виконання цієї команди – на рис. 12.

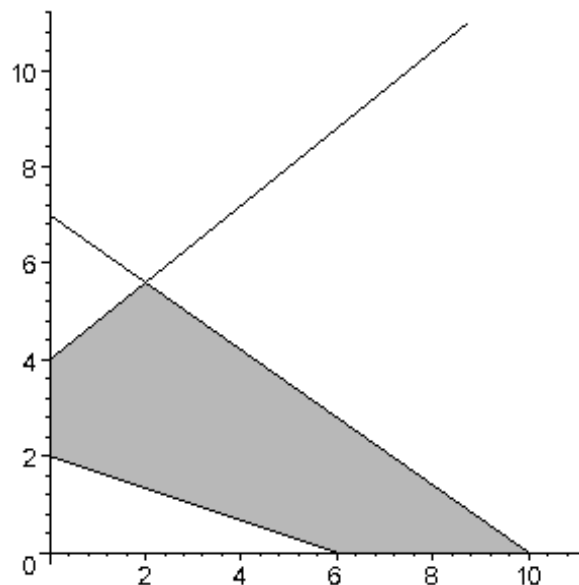


Рисунок 12

Примітка. Для вірного масштабу треба виділити графік та натиснути кнопку **1:1** на панелі інструментів Maple

Знайдемо точку максимуму цільової функції.

Команда підключення бібліотеки симплекс-програм:

```
> with(simplex):
```

Warning, new definition for maximize

Warning, new definition for minimize

Команда розв'язання задачі ЛП симплекс-методом:

```
> maximize(F,{g1,g2,g3}union{x1>=0,x2>=0});  
           {x1 = 10, x2 = 05}
```

Команди присвоєння змінним x1,x2 знайдених значень:

```
> x1:=10:x2:=0:
```

Команда обчислення значення цільової функції та значень системи обмежень у точці максимуму:

```
> F_max:=F;g1;g2;g3;x1:='x1':x2:='x2':  
           F_max := 20  
           6 ≤ 10  
           70 ≤ 70  
           -20 ≤ 40
```

Відповідь: максимального значення цільова функція $F = 20$ досягає в точці (10; 0). Це співпадає з «ручним» розрахунком.

Примітка: мінімум знаходиться відповідно:

```
> minimize(F,{g1,g2,g3}union{x1>=0,x2>=0});  
           {x1 = 0, x2 = 2 }  
  
> x1:=0:x2:=2:  
  
> F_min:=F;g1;g2;g3;x1:='x1':x2:='x2':  
           F_min := 2  
           6 ≤ 6  
           20 ≤ 70  
           -20 ≤ -10
```

Зауваження. Після розв'язання задачі можна на одному рисунку побудувати розв'язання системи СОБ, градієнт функції, пряму в точці максимуму та мінімуму.

Команда побудови графіка цільової функції: (*Примітка.* Якщо цільова функція $F = 2x_1 + x_2$ у точці максимуму дорівнює 20, то цільова пряма, що проходить через точку максимуму, має рівняння:

$$x_2 = (20 - 2x_1) / 1.$$

```
> ris2:=plot((20-2*x1)/1,x1=0..11,x2=0..11,color=black,thickness=2):
```

Команда побудови градієнта:

```
> ris3:=plottools[arrow]([0,0],[8,4],.1,0.6,.1):
```

Команда підписування точки максимуму з координатами $x_1 = 10$, $x_2 = 0$:

```
> ris4:=textplot([10,0,'max'],align={ABOVE,RIGHT}):
```

```
> ris5:=plot((2-2*x1)/1,x1=0..11,x2=0..11,color=black,thickness=2):
```

```
> ris6:=textplot([0,2,'min'],align={ABOVE,RIGHT}):
```

Команда побудови на одному рисунку області розв'язків, градієнта і графіка цільової функції:

```
> display(ris1,ris2,ris3,ris4,ris5,ris6);
```

Результат виконання цієї команди – на рис. 13.

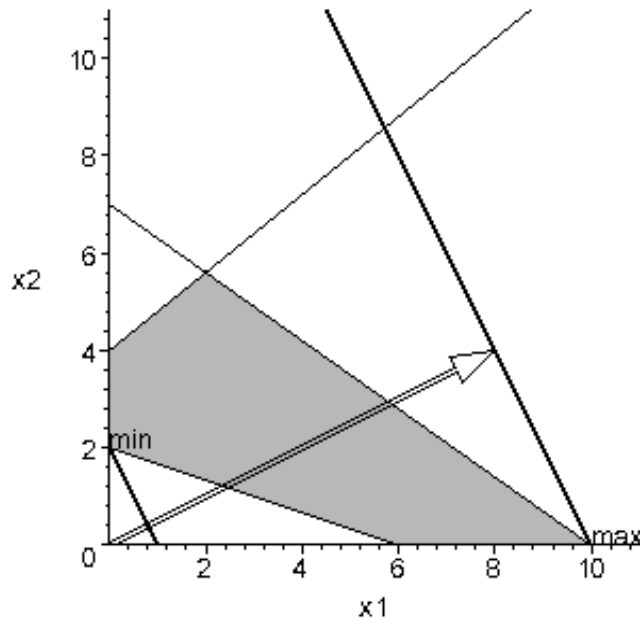


Рисунок 13

5.4 Завдання до лабораторної роботи 1

Розв'язати графічно формалізовану задачу лінійного програмування (табл. 1). Записати задачу в матричній формі.

Звіт про лабораторну роботу повинен містити:

- 1 Тему роботи, завдання.
- 2 Запис задачі в матричній формі.
- 3 Графічне розв'язання задачі.
- 4 Висновки.

Таблиця 1 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 1

<i>Варіант 1</i> $-x_1 + x_2 \leq 3,$ $5x_1 + 3x_2 \leq 97,$ $x_1 + 7x_2 \geq 77,$ $f = 3x_1 + 4x_2$ (max)	<i>Варіант 2</i> $10x_1 - x_2 \geq 57,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 53,$ $6x_1 - 7x_2 \leq 15,$ $f = 5x_1 + x_2$ (max)	<i>Варіант 3</i> $-4x_1 + 5x_2 \leq 29,$ $3x_1 - x_2 \leq 14,$ $5x_1 + 2x_2 \geq 38,$ $f = 3x_1 + 2x_2$ (max)	<i>Варіант 4</i> $-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$ $5x_1 - 6x_2 \leq 26,$ $x_1 + 4x_2 \geq 26,$ $f = 5x_1 + 7x_2$ (max)
<i>Варіант 5</i> $x_1 + 4x_2 \leq 53,$ $x_1 - x_2 \leq 3,$ $7x_1 + 3x_2 \geq 71,$ $f = 9x_1 + 2x_2$ (max)	<i>Варіант 6</i> $3x_1 - x_2 \geq 9,$ $2x_1 + x_2 \leq 50,$ $-x_1 + 4x_2 \geq 19,$ $f = x_1 + 5x_2$ (max)	<i>Варіант 7</i> $6x_1 - 5x_2 \geq 17,$ $x_1 + 2x_2 \leq 34,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 17,$ $f = 5x_1 + 3x_2$ (min)	<i>Варіант 8</i> $11x_1 - 3x_2 \geq 24,$ $9x_1 + 4x_2 \leq 110,$ $-2x_1 + 7x_2 \geq 15,$ $f = 9x_1 + 2x_2$ (min)
<i>Варіант 9</i> $2x_1 - x_2 \geq 4,$ $x_1 + 3x_2 \leq 37,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 20,$ $f = 4x_1 + 3x_2$ (min)	<i>Варіант 10</i> $-x_1 + x_2 \leq 3,$ $5x_1 + 3x_2 \leq 97,$ $x_1 + 7x_2 \geq 77,$ $f = 7x_1 + 2x_2$ (min)	<i>Варіант 11</i> $-x_1 + x_2 \leq 4,$ $5x_1 + 3x_2 \leq 92,$ $x_1 + 7x_2 \geq 76,$ $f = 3x_1 + 4x_2$ (min)	<i>Варіант 12</i> $10x_1 - x_2 \geq 47,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 51,$ $6x_1 - 7x_2 \leq 9,$ $f = 5x_1 + x_2$ (min)
<i>Варіант 13</i> $-4x_1 + 5x_2 \leq 33,$ $3x_1 - x_2 \leq 11,$ $5x_1 + 2x_2 \geq 33,$ $f = 3x_1 + 2x_2$ (max)	<i>Варіант 14</i> $-3x_1 + 14x_2 \leq 81,$ $5x_1 - 6x_2 \leq 21,$ $x_1 + 4x_2 \geq 25,$ $f = 5x_1 + 7x_2$ (max)	<i>Варіант 15</i> $x_1 + 4x_2 \leq 52,$ $x_1 - x_2 \leq 2,$ $7x_1 + 3x_2 \geq 64,$ $f = 9x_1 + 2x_2$ (max)	<i>Варіант 16</i> $3x_1 - x_2 \geq 6,$ $2x_1 + x_2 \leq 48,$ $-x_1 + 4x_2 \geq 20,$ $f = x_1 + 5x_2$ (max)
<i>Варіант 17</i> $6x_1 - 5x_2 \geq 11,$ $x_1 + 2x_2 \leq 33,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 21,$ $f = 5x_1 + 3x_2$ (max)	<i>Варіант 18</i> $11x_1 - 3x_2 \geq 13,$ $9x_1 + 4x_2 \leq 101,$ $-2x_1 + 7x_2 \geq 17,$ $f = 9x_1 + 2x_2$ (max)	<i>Варіант 19</i> $2x_1 - x_2 \geq 2,$ $x_1 + 3x_2 \leq 36,$ $4x_1 + 9x_2 \geq 24,$ $f = 4x_1 + 3x_2$ (min)	<i>Варіант 20</i> $-x_1 + x_2 \leq 4,$ $5x_1 + 3x_2 \leq 92,$ $x_1 + 7x_2 \geq 77,$ $f = 7x_1 + 2x_2$ (min)
<i>Варіант 21</i> $4x_1 - x_2 \geq 6,$ $9x_1 + 8x_2 \leq 157,$ $-3x_1 + 11x_2 \geq 16,$ $f = x_1 + x_2$ (min)	<i>Варіант 22</i> $3x_1 - x_2 \geq 9,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 50,$ $-x_1 + 4x_2 \geq 19,$ $f = 6x_1 + x_2$ (min)	<i>Варіант 23</i> $10x_1 - x_2 \geq 57,$ $2x_1 + 3x_2 \leq 53,$ $6x_1 - 7x_2 \leq 15,$ $f = 2x_1 + 3x_2$ (min)	<i>Варіант 24</i> $11x_1 - 3x_2 \geq 24,$ $9x_1 + 4x_2 \leq 110,$ $-2x_1 + 7x_2 \geq 15,$ $f = 7x_1 + x_2$ (min)
<i>Варіант 25</i> $4x_1 - x_2 \geq 6,$ $9x_1 + 8x_2 \leq 157,$ $-3x_1 + 11x_2 \geq 16,$ $f = 8x_1 + 5x_2$ (max)	<i>Варіант 26</i> $-3x_1 + 14x_2 \leq 78,$ $5x_1 - 6x_2 \leq 26,$ $x_1 + 4x_2 \geq 26,$ $f = x_1 + 8x_2$ (max)	<i>Варіант 27</i> $2x_1 - x_2 \geq 4,$ $x_1 + 3x_2 \leq 37,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 20,$ $f = x_1 + 3x_2$ (max)	<i>Варіант 28</i> $6x_1 - 5x_2 \geq 17,$ $x_1 + 2x_2 \leq 34,$ $-4x_1 + 9x_2 \geq 20,$ $f = x_1 + 9x_2$ (max)
<i>Варіант 29</i> $-4x_1 + 5x_2 \leq 29,$ $3x_1 - x_2 \leq 14,$ $5x_1 + 2x_2 \geq 38,$ $f = 3x_1 + x_2$ (max)	<i>Варіант 30</i> $x_1 + 4x_2 \leq 53,$ $x_1 - x_2 \leq 3,$ $7x_1 + 3x_2 \geq 71,$ $f = x_1 + 7x_2$ (max)		

6 ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

6.1 Поняття двоїстості

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність деяку іншу задачу лінійного програмування, яку називають *двоїстою* відносно першої.

Цільова функція і система обмежень двоїстої задачі цілком визначаються умовою прямої задачі.

Вихідна і двоїста задачі утворюють пару взаємно двоїстих задач, і кожную з них можна розглядати як вхідну (пряму) задачу.

Виявляється, що, вирішуючи одну із задач, ми тим самим вирішуємо і другу. Теорія двоїстості дозволяє, таким чином, розширити число задач лінійного програмування, розв'язання яких представляє теоретичний і практичний інтерес.

Найчастіше двоїсті задачі використовуються для перевірки правильності розв'язання прямої задачі, а також для аналізу розв'язання і вихідних даних.

6.2 Типи задач лінійного програмування

У лінійному програмуванні задачі в залежності від виду системи обмежень поділяються на три типи:

1 *Стандартна задача:*

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min).$$

або

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким чином, у стандартній задачі всі обмеження – нерівності ($\geq$ чи $\leq$ у залежності від цільової функції) і всі змінні невід'ємні.

2 *Канонічна задача:*

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким чином, у канонічній задачі всі обмеження – рівності і всі змінні – невід’ємні.

3 Загальна задача

У загальній задачі деякі обмеження – рівності, деякі – нерівності, а також деякі змінні можуть набувати довільного знака.

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, l;$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = l+1, \dots, m;$$

$$l < m;$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad k < n.$$

Останню нерівність варто розуміти так: змінні $x_1, \dots, x_k$ – невід’ємні, а змінні $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ можуть набувати довільного знака (тому що ніяких умов на їхні знаки в задачі немає).

У матричному вигляді загальну задачу подати не можна.

6.3 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі стандартного виду

У загальному вигляді запишемо:

Пряма задача:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Двоїста задача:

$$G = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \quad (\min).$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

$$G = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \quad (\max).$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \leq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Сформулюємо алгоритм побудови двоїстої задачі до прямої задачі стандартного виду в словесній формі.

Кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі; кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі.

Вільні члени системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, а коефіцієнти цільової функції прямої задачі – вільними членами системи обмежень двоїстої задачі.

Максимізація (мінімізація) цільової функції прямої задачі замінюється мінімізацією (максимізацією) цільової функції двоїстої задачі.

Матрицею системи обмежень двоїстої задачі служить матриця, отримана транспонуванням матриці системи обмежень прямої задачі.

Усі змінні двоїстої задачі – невід’ємні: $y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$.

6.4 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі канонічного виду

У загальному вигляді запишемо:

Пряма задача:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\max).$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Двоїста задача:

$$G = \sum_{i=1}^m b_i \cdot y_i \quad (\min).$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot y_i \geq c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

Сформулюємо алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі канонічного виду в словесній формі.

Двоїста задача до задачі канонічного виду будується за тим самим алгоритмом, що і двоїста до задачі стандартного виду, відмінність в останньому пункті:

5 Усі змінні двоїстої задачі довільного знака (ніяких обмежень на знак змінних $y_i, \quad i = 1, \dots, m$ не накладається).

6.5 Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі загального виду

Алгоритм побудови двоїстої задачі до задачі загального виду збігається з алгоритмом побудови двоїстої задачі до задачі стандартного виду в пунктах 1–4. Пункт 5 алгоритму змінюється і стає таким:

5 Кожному обмеженню-нерівності прямої задачі відповідає невід’ємна змінна двоїстої задачі, а кожному обмеженню-рівності прямої задачі – змінна двоїстої задачі довільного знака. Кожній невід’ємній змінній

прямої задачі відповідає обмеження-нерівність двоїстої задачі, а кожній змінній довільного знака прямої задачі відповідає обмеження-рівність двоїстої задачі.

6.6 Приклад побудови двоїстої задачі для задачі загального типу

Дана задача лінійного програмування:

$$\begin{aligned} F &= 2x_1 + 4x_3 - 5x_4 \quad (\max) \\ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_4 \leq 12, \\ x_2 - 6x_3 - 3x_4 \geq 8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \end{cases} \\ x_2 &\geq 0, \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Перш ніж будувати двоїсту задачу, перетворимо вхідну задачу. Тому що цільова функція максимізується, то всі обмеження-нерівності повинні мати знак $\leq$. Тому друге обмеження потрібно помножити на -1 . Одержимо систему обмежень вигляду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_4 \leq 12, \\ -x_2 + 6x_3 + 3x_4 \leq -8, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Випишемо матрицю коефіцієнтів системи обмежень A , вектор вільних членів B і вектор коефіцієнтів цільової функції C :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Будуємо двоїсту задачу за пунктами:

1 Кількість обмежень прямої задачі дорівнює 3, тому кількість змінних двоїстої задачі дорівнює $3 - u_1, u_2, u_3$; кількість змінних прямої задачі дорівнює 4, тому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює 4.

2 Вільні члени системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі (коефіцієнти цільової функції прямої задачі – вільними членами обмежень двоїстої задачі). Отже, цільова функція двоїстої задачі має вигляд:

$$G = \bar{B}^T \cdot \bar{Y} = 12y_1 - 8y_2 + 5y_3.$$

3 Максимізація цільової функції прямої задачі замінюється мінімізацією цільової функції двоїстої задачі:

$$G = 12y_1 - 8y_2 + 5y_3 \quad (\min).$$

4 Матрицею коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі служить матриця, отримана транспонуванням матриці системи обмежень прямої задачі:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо ліву і праву частини системи обмежень двоїстої задачі.

Ліва частина $(A^T \cdot \bar{Y})$: Права частина $(\bar{C})$:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 & 2 \\ 5y_1 - y_2 + 3y_3 & 0 \\ 6y_2 - 2y_3 & 4 \\ y_1 + 3y_2 & -5 \end{cases}$$

Між лівою і правою частинами потрібно вставити знаки відносин $(=, \leq, \geq)$

5 Встановимо вид відносин. Кожній невід'ємній змінній прямої задачі відповідає обмеження-нерівність двоїстої задачі. Оскільки змінні x_2 і x_3 – невід'ємні, то обмеження 2 і 3 – нерівності. Кожній змінній довільного знака прямої задачі відповідає обмеження-рівність двоїстої задачі. Оскільки змінні x_1 і x_4 мають довільні знаки, обмеження 1 і 4 – рівності.

У задачі мінімізації обмеження-нерівності мають знак $\geq$.

Встановимо знаки змінних двоїстої задачі. Кожному обмеженню-нерівності прямої задачі відповідає невід'ємна змінна двоїстої задачі. Оскільки обмеження прямої задачі 1 і 2 – нерівності, то y_1 і y_2 – невід'ємні. Кожному обмеженню-рівності прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі довільного знака. Оскільки третє обмеження прямої задачі – рівність, то y_3 має довільний знак.

Система обмежень двоїстої задачі буде такою:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_3 = 2, \\ 5y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 0, \\ 6y_2 - 2y_3 \geq 4, \\ y_1 + 3y_2 = -5, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Одержали математичну модель двоїстої задачі:

$$\begin{aligned} G = 12y_1 - 8y_2 + 5y_3 \quad (\min) \\ \begin{cases} 3y_1 + y_3 = 2, \\ 5y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 0, \\ 6y_2 - 2y_3 \geq 4, \\ y_1 + 3y_2 = -5, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6.7 Основні твердження про взаємно двоїсті задачі

6.7.1 Перша теорема двоїстості

Для взаємно двоїстих задач можливий один із взаємовиключаючих випадків:

1 Якщо пряма задача має оптимальний розв'язок, то і двоїста задача має оптимальний розв'язок, при цьому значення цільових функцій на оптимальних розв'язках збігаються: $F = G$.

2 Якщо в прямій задачі область припустимих розв'язків не порожня, а цільова функція на ній не обмежена ($F \rightarrow \infty$ або $F \rightarrow -\infty$), то у двоїстій задачі буде порожня область розв'язків.

6.7.2 Друга теорема двоїстості

Якщо за оптимальним планом прямої задачі якийсь i -й ресурс використовується не цілком, то відповідна змінна двоїстої задачі дорівнює нулю ($y_i^* = 0$); якщо ж змінна двоїстої задачі, що відповідає ресурсу i -го виду позитивна, то в розв'язанні прямої задачі цей ресурс використовується цілком.

Якщо j -а змінна прямої задачі має позитивне значення, то відповідне обмеження двоїстої задачі після розв'язання буде виконуватися як строга рівність. А якщо ж j -а змінна прямої задачі дорівнює 0, то відповідне j -е обмеження двоїстої задачі після розв'язання буде виконуватися як строга нерівність.

6.8 Економічний зміст двоїстої задачі

Так само як пряма, двоїста задача має економічний сенс і її розв'язання використовується для деяких задач в економічному аналізі.

З економічної точки зору розв'язання прямої задачі планування виробництва (визначення оптимального асортименту) дозволяє одержати оптимальний план випуску продукції, а розв'язання двоїстої задачі – оптимальну систему умовних оцінок використовуваних ресурсів.

З розв'язань прямої і двоїстої задачі планування виробництва випливають такі властивості:

Властивість 1. Зв'язок значень цільових функцій прямої і двоїстої задачі.

Значення цільових функцій прямої і двоїстої задач рівні: $F_{max} = G_{min}$.

Властивість 2. Розв'язання як міра впливу на цільову функцію.

Нехай, наприклад, величина ресурсу, оцінка якого y_i збільшиться на k одиниць ($b_i + k$). Порахуємо зміну величини функції G :

$$\begin{aligned} \Delta G = G_{измен} - G_{исход} &= \sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j + (b_i + k) y_i + \sum_{j=i+1}^m b_j y_j - \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j + b_i y_i + \sum_{j=i+1}^m b_j y_j \right) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j - \sum_{j=1}^{i-1} b_j y_j \right) + ((b_i + k) y_i - b_i y_i) + \left(\sum_{j=i+1}^m b_j y_j - \sum_{j=i+1}^m b_j y_j \right) = k y_i. \end{aligned}$$

Таким чином, значення цільової функції двоїстої задачі збільшилося на $k y_i$. Але значення цільової функції прямої задачі також збільшилося на $k y_i$, тому що $F_{max} = G_{min}$.

Іншими словами, зміна цільової функції F_{max} при збільшенні вільного члена b_i на величину k можна визначити, використовуючи співвідношення $\Delta F_{max} = k y_i$.

Величина двоїстої оцінки того чи іншого ресурсу показує, наскільки зросло б максимальне значення цільової функції, якби обсяг даного ресурсу збільшився на одиницю. Однак варто мати на увазі, що двоїста оцінка дозволяє судити про ефект порівняно невеликих змін обсягу ресурсів.

Найбільшій величині оцінки вартості ресурсів відповідає найбільш дефіцитний ресурс. Недефіцитному ресурсу відповідає оцінка, що дорівнює 0.

Властивість 3. Оцінки u_i як міра дефіцитності ресурсів.

Чим вищою є величина оцінки, тим гостріше дефіцитність ресурсу.

Властивість 4. Оцінки u_i як міра вигідності випуску продукції

Якщо одне обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність, це означає, що оцінка ресурсів, використовуваних на виробництво відповідного виробу, є вищою від ціни цього виробу, і, отже, випускати його не вигідно. Якщо обмеження двоїстої задачі виконується як рівність, це означає, що оцінки ресурсів, використовуваних для виробництва одиниці відповідного виробу, дорівнюють у точності їхнім цінам. Тому випускати цей вид продукції економічно доцільно, що буде видно з розв'язання прямої задачі.

7 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2. ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО АСОРТИМЕНТУ

Тема. Задача визначення оптимального асортименту. Двоїстість у задачах лінійного програмування.

Мета: *набути вміння складання математичної моделі задачі виробничого планування; одержання двоїстої задачі; засвоїти такі поняття: математична модель (формалізація); взаємно двоїсті задачі; типи задач ЛП: стандартна, канонічна, загального виду; аналіз розв'язання.*

Робота розрахована на 4 години.

7.1 Задача визначення оптимального асортименту (планування виробництва)

Дані n видів ресурсів у кількостях $p_1, p_2, \dots, p_n$, що можуть бути використані для виготовлення m виробів. Задано матрицю $A = [a_{ij}]$, де a_{ij} характеризує норми витрати i -го ресурсу на виробництво j -го виробу ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$). Вартість одиниці j -го виробу характеризується показником c_j .

Визначити план виробництва, при якому сумарна вартість набуває найбільшого значення.

План виробництва – це вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, що показує, яка кількість кожного продукту буде вироблена; x_j – змінні задачі.

Цільова функція – максимальна вартість продукції, що випускається:

$$F = \sum_{j=1}^m c_j \cdot x_j \quad (\max). \quad (7)$$

З умови обмеженості ресурсів, з одного боку, і сумарних витрат ресурсів для виконання плану виробництва, з іншого боку, будується система обмежень:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j &\leq p_i, \quad i = 1, \dots, n; \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

Одержали математичну модель задачі.

Зауваження 1. Крім зазначених обмежень по ресурсах, в умову задачі, а отже, і в її математичну модель можуть вводитися додаткові обмеження на планований випуск продукції (обмеження по асортименту, умови

комплектності і т. ін.). Наприклад, кількість першого продукту вдвічі більша, ніж кількість другого продукту, третього продукту – не менше 120 одиниць і т. д.

Зауваження 2. Математична модель (7) – (8), хоча і відображає головні риси реального виробництва, є ідеалізованою. У ній, наприклад, не враховані динаміка виробництва, ритмічність постачань і деякі інші властивості реального виробництва.

7.2 Завдання до лабораторної роботи 2

Формалізувати задану задачу лінійного програмування. Розв'язати задачу графічним методом. Зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Записати задачу в матричній формі. Перейти до двоїстої задачі. Розв'язати двоїсту задачу за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати відповіді прямої і двоїстої задач.

Задача 1

Для виробництва двох видів виробів А і В використовується три типи технологічного устаткування. На виробництво одиниці виробу А устаткування першого типу використовується a_1 годин, устаткування другого типу – a_2 годин, третього – a_3 годин. На виробництво одиниці виробу В устаткування першого типу використовується b_1 годин, устаткування другого типу – b_2 годин, третього – b_3 годин. На виготовлення всіх виробів адміністрація підприємства може надати устаткування першого типу не більше, ніж на t_1 годин, устаткування другого типу – не більш, ніж на t_2 годин, устаткування третього типу – не більш, ніж на t_3 годин.

Прибуток від реалізації одиниці готового виробу А складає r_1 грошових одиниць, виробу В – r_2 грошових одиниць.

Скласти план випуску виробів, що забезпечує максимальний прибуток.

Задача 2

Для виробництва двох видів виробів А і В використовується три види сировини. На виробництво одиниці виробу А потрібно затратити сировини першого виду a_1 кг, сировини другого виду – a_2 кг, третього – a_3 кг. На виробництво одиниці виробу В потрібно затратити сировини першого виду b_1 кг, сировини другого виду – b_2 кг, третього – b_3 кг. Виробництво забезпечене сировиною першого виду в кількості t_1 кг, другого виду – у кількості t_2 кг, третього виду – t_3 кг.

Прибуток від реалізації одиниці готового виробу А складає r_1 грошових одиниць, виробу В – r_2 грошових одиниць.

Скласти план випуску виробів, що забезпечує максимальний прибуток.

Звіт про лабораторну роботу

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Графічне розв'язання задачі.
- 4 Запис задачі в матричній формі.
- 5 Роздруківка розв'язання задачі.
- 6 Формалізація двоїстої задачі.
- 7 Роздруківка розв'язання двоїстої задачі.
- 8 Економічний аналіз результату.

Примітка. Приклади розв'язання задачі в пакетах MAPLE, Excel, Mathcad наведено в додатках А, Б, В відповідно.

7.3 Приклад виконання лабораторної роботи 2

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовується три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Праця, люд.-год.	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, год.	1	2	5	244
Прибуток, гр. од.	10	14	12	–

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток максимальний.

Розв'язання

Позначимо кількість одиниць виробу А, що випускається підприємством, через x_1 , виробу В – x_2 , виробу С – x_3 .

Визначимо прибуток від випуску виробів. Прибуток від випуску одного виробу А складає за умовою 10 гр. од. План випуску виробів А – x_1 од. Прибуток від випуску виробів А за планом складе $10x_1$ гр. од.

Аналогічно визначаємо прибуток від випуску виробів В – $14x_2$ гр. од. і виробів С – $12x_3$ гр. од. Сумарний прибуток від випуску всіх виробів складає $(10x_1 + 14x_2 + 12x_3)$ гр. од.

Тоді цільова функція має вигляд: $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ – сумарний прибуток і має бути найбільшим.

Складемо систему обмежень.

1 Обмеження на використання ресурсу «праця»

На випуск одиниці виробу А витрачається 4 людино-години ресурсу «праця», на x_1 одиниць виробу А витрачається $4x_1$ годин ресурсу «праця». На випуск x_2 виробів В – $2x_2$ люд.-год. ресурсу «праця»; на випуск x_3 виробів С – $1x_3$ люд.-год. ресурсу «праця». Усього на випуск виробів витрачається ресурсу «праця» $(4x_1 + 2x_2 + x_3)$ люд.-год., що за умовою не перевищує 180 люд.-год. Обмеження на ресурс «праця»:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180.$$

2 Обмеження на використання сировини

На випуск одиниці виробу А витрачається 3 кг сировини, на x_1 одиниць виробу А – $3x_1$ кг сировини. На випуск x_2 виробів В – $1x_2$ кг сировини; на випуск x_3 виробів С – $3x_3$ кг сировини. Усього на випуск виробів витрачається $(3x_1 + x_2 + 3x_3)$ кг сировини, що за умовою не перевищує 210 кг. Обмеження на використання сировини:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210.$$

3 Обмеження на використання часу роботи устаткування

На випуск одиниці виробу А витрачається 1 година устаткування, на x_1 одиниць виробу А – x_1 годин устаткування. На випуск x_2 виробів В – $2x_2$ годин устаткування; на випуск x_3 виробів С – $5x_3$ годин устаткування. Усього на випуск виробів витрачається $(x_1 + 2x_2 + 5x_3)$ годин устаткування, що за умовою не перевищує 244 години. Обмеження на годину роботи устаткування:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244.$$

Оскільки x_1 , x_2 і x_3 – випуск виробів, то вони невід'ємні.

Одержали математичну модель задачі:

$$\begin{aligned} F &= 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \text{ (max).} \\ &\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язавши задачу за допомогою одного з пакетів (MAPLE, Excel, Mathcad), одержали значення змінних: $x_1 = 0$; $x_2 = 82$; $x_3 = 16$; $F_{\max} = 1340$.

Нагадаємо, що розв'язання задачі лінійного програмування містить не тільки формалізацію і математичне розв'язання, але й економічний аналіз отриманих результатів.

7.4 Економічний висновок

Для одержання максимального прибутку в розмірі 1340 гр. од. план випуску продукції має бути таким: виріб А – не випускається, випуск виробу В – 82 гр. од., виробу С – 16 гр. од. При цьому витрати ресурсів складуть:

«праця» – 180 люд.-год. при запасі 180 люд.-год.;

«сировина» – 130 кг при запасі 210 кг (залишок – 80 кг);

«устаткування» – 244 год. при запасі 244 год.

Надлишковим є ресурс «сировина», недостатнім – «праця» і «устаткування».

7.5 Побудова двоїстої задачі до задачі планування виробництва

Перед побудовою двоїстої задачі запишемо задачу в матричній формі. Випишемо вектори і матрицю:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 180 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді:

$$F = \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A} \cdot \bar{X} \leq \bar{B},$$

$$\bar{X} \geq \bar{0}.$$

Будуємо двоїсту задачу.

1 Кількість обмежень прямої задачі дорівнює 3, значить кількість змінних двоїстої задачі дорівнює 3 – y_1, y_2, y_3 ; кількість змінних прямої задачі дорівнює 3, значить кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює 3.

2 Вільні члени системи обмежень прямої задачі служать коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі (коефіцієнти цільової функції прямої задачі – вільними членами обмежень двоїстої задачі). Отже, цільова функція двоїстої задачі буде такою:

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3.$$

3 Максимізація цільової функції прямої задачі замінюється мінімізацією цільової функції двоїстої задачі:

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \text{ (min)}.$$

4 Матрицею коефіцієнтів обмежень двоїстої задачі служить матриця, отримана транспонуванням матриці обмежень прямої задачі:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

5 Усі змінні двоїстої задачі невід'ємні: $y_i \geq 0$.

У матричній формі двоїста задача має такий вигляд:

$$G = \bar{B}^T \cdot \bar{Y} \quad (\text{min}).$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \bar{Y} \geq \bar{C},$$

$$\bar{Y} \geq \bar{0}.$$

У координатній формі двоїста задача має вигляд:

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \text{ (min)}.$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10,$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Формулювання двоїстої задачі за тими самими вхідними даними

Припустимо, що підприємство за деяких обставин вирішило реалізувати наявні ресурси, не випускаючи готової продукції. Необхідно встановити оптимальні ціни на ресурси y_1, y_2, y_3 , що задовольняли б умовам: 1) підприємство, що закуповує дані ресурси, прагне, щоб загальна вартість

придбаних ресурсів була мінімальною; 2) за кожен вид ресурсів треба сплатити не менше від тієї суми, яку можна одержати при переробці сировини в готову продукцію.

Відповідно до першої умови, загальна вартість сировини виразиться величиною $G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3$ (min). Відповідно до другої вимоги, вводяться такі обмеження: на одиницю першого виду продукції А витрачаються 4 одиниці ресурсу «праця» ціною y_1 , 3 одиниці ресурсу «сировина» ціною y_2 і 1 одиниця ресурсу «устаткування» ціною y_3 . Вартість усіх ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці продукції А, дорівнює $4y_1 + 3y_2 + y_3$ і повинна скласти не менше ніж 10, тобто $4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$.

У результаті аналогічних міркувань щодо виробництва продукції В і С система нерівностей набуде вигляду:

$$\begin{aligned}2y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq 12.\end{aligned}$$

Ціни ресурсів, природно, мають бути невід'ємними:

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Одержали пару симетричних взаємно двоїстих задач, і кожна з них може розглядатися як вхідна.

Пряма задача:

$$\begin{aligned}F &= 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \text{ (max).} \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 244, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Двоїста задача:

$$\begin{aligned}G &= 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \text{ (min).} \\ 4y_1 + 3y_2 + y_3 &\geq 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 &\geq 12, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Розв'язок прямої задачі дає оптимальний план виробництва виробів А, В, С, а розв'язок двоїстої задачі – оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовується для виробництва цих виробів.

Розв'язки прямої задачі:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 82, \quad x_3 = 16, \quad F = 1340.$$

Перевірка виконання обмежень прямої задачі:

$$4 * 0 + 2 * 82 + 16 = 180 \text{ (праця, люд.-год.)};$$

$$3 * 0 + 82 + 3 * 16 = 130 \leq 210 \text{ (сировина, кг); } 210 - 130 = 80;$$

$$0 + 2 * 82 + 5 * 16 = 244 \text{ (устаткування, год.)}.$$

Розв'язки двоїстої задачі:

$$y_1 = 5,75, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1,25, \quad G = 1340.$$

Перевірка виконання обмежень двоїстої задачі:

$$4 * 5,75 + 3 * 0 + 1,25 = 24,25 \geq 10,$$

$$2 * 5,75 + 0 + 2 * 1,25 = 14,$$

$$5,75 + 3 * 0 + 5 * 1,25 = 12.$$

З розв'язку прямої задачі видно, що оптимальним планом виробництва виробів є такий, при якому виготовляється 82 одиниці виробу В і 16 одиниць виробу С. При даному плані виробництва залишається невикористаним 80 кг сировини, а загальна ціна виробів дорівнює 1340.

Зробимо висновки за розв'язаннями прямої і двоїстої задачі згідно з наведеними в теоретичній частині властивостями 1–4:

1 Значення цільових функцій прямої і двоїстої задач дорівнюють:

$$F_{\max} = G_{\min} \quad (1340 = 1340).$$

2 Збільшення фонду часу роботи (ресурс «праця») на 1 год. приведе до того, що з'явиться можливість скласти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому загальна ціна виготовленої продукції зросте на 5,75 одиниць і буде дорівнювати $1340 + 5,75 = 1345,75$ одиниць. Так само збільшення на 1 год. часу роботи устаткування дозволить знайти новий оптимальний план виробництва виробів, при якому загальна ціна виготовленої продукції зросте на 1,25 од. і складе $1340 + 1,25 = 1341,25$ одиниць.

Нульова оцінка, отримана для ресурсу «сировина», означає, що, оскільки сировина використовується не цілком, то збільшення його запасів не вплине на оптимальний план випуску продукції і загальну ціну виготовленої продукції.

3 Змінні $y_1 = 5,75$, $y_2 = 0$ і $y_3 = 1,25$ визначають умовні оцінки одиниць ресурсів «праця», «сировина» і «устаткування» відповідно. Оцінки «праця» і «устаткування» відмінні від 0, відповідно до другої теореми дво-

їстості відповідні ресурси використовуються цілком при оптимальному плані виробництва продукції, тобто є дефіцитними. Двоїста оцінка ресурсу «сировина» дорівнює 0. Цей вид ресурсу не цілком використовується при оптимальному плані виробництва продукції.

Чим вищою є величина оцінки, тим гостріше дефіцитність ресурсу: «праця» більш дефіцитна, ніж «устаткування»:

$$(y_1 = 5,75) > (y_3 = 1,25).$$

4 При підстановці двоїстих оцінок у систему обмежень двоїстої задачі одержуємо:

$$23 + 1,25 > 10,$$

$$11,5 + 2,5 = 14,$$

$$5,75 + 6,25 = 12.$$

Перше обмеження двоїстої задачі виконується як строга нерівність. Це означає, що оцінка ресурсів, використовуваних на виробництво одного виробу виду А, вище від ціни цього виробу, і, отже, випускати виріб А не вигідно. Друге і третє обмеження двоїстої задачі виконуються як рівності. Це означає, що оцінки ресурсів, використовуваних для виробництва одиниці відповідних виробів В і С дорівнюють у точності їхнім цінам. Тому випускати ці два види продукції економічно доцільно, що і видно з розв'язку прямої задачі.

7.6 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple

Розв'язання прямої задачі:

> restart:

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> F:=10*x1+14*x2+12*x3;

$$F := 10 x1 + 14 x2 + 12 x3$$

> g1:=4*x1+2*x2+x3<=180; g2:=3*x1+x2+3*x3<=210;

g3:=x1+2*x2+5*x3<=244;

$$g1 := 4 x1 + 2 x2 + x3 \leq 180$$

$$g2 := 3 x1 + x2 + 3 x3 \leq 210$$

$$g3 := x1 + 2 x2 + 5 x3 \leq 244$$

> **maximize(F,{g1,g2,g3},NONNEGATIVE);**

$\{x_1 = 0, x_3 = 16, x_2 = 82\}$

> **x1:=0;x2:=82;x3:=16:F;{g1,g2,g3};**

1340

$\{180 \leq 180, 130 \leq 210, 244 \leq 244\}$

Розв'язання двоїстої задачі:

> **restart:**

> **with(simplex):**

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> **G:=180*y1+210*y2+244*y3;**

$G := 180 y_1 + 210 y_2 + 244 y_3$

> **d1:=4*y1+3*y2+y3>=10; d2:=2*y1+y2+2*y3>=14;**

d3:=y1+3*y2+5*y3>=12;

$d_1 := 10 \leq 4 y_1 + 3 y_2 + y_3$

$d_2 := 14 \leq 2 y_1 + y_2 + 2 y_3$

$d_3 := 12 \leq y_1 + 3 y_2 + 5 y_3$

> **minimize(G,{d1,d2,d3},NONNEGATIVE);**

$\{y_2 = 0, y_3 = \frac{5}{4}, y_1 = \frac{23}{4}\}$

> **y1:=23./4; y2:=0; y3:=5./4; G;{d1,d2,d3};**

$y_1 := 5.750000000$

$y_2 := 0$

$y_3 := 1.250000000$

1340.000000

$\{10 \leq 24.25000000, 14 \leq 14.00000000, 12 \leq 12.00000000\}$

7.7 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 2

Таблиця 3 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 2

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3
$a_1 = 5, b_1 = 3, t_1 = 750,$	$a_1 = 6, b_1 = 2, t_1 = 600,$	$a_1 = 4, b_1 = 3, t_1 = 440,$
$a_2 = 4, b_2 = 3, t_2 = 630,$	$a_2 = 4, b_2 = 3, t_2 = 520,$	$a_2 = 3, b_2 = 4, t_2 = 393,$
$a_3 = 3, b_3 = 4, t_3 = 700,$	$a_3 = 3, b_3 = 4, t_3 = 600,$	$a_3 = 3, b_3 = 5, t_3 = 450,$
$r_1 = 5, r_2 = 6$	$r_1 = 6, r_2 = 3$	$r_1 = 6, r_2 = 5$

Продовження таблиці 3

Варіант 4

$a_1 = 3, b_1 = 2, t_1 = 273,$
 $a_2 = 3, b_2 = 3, t_2 = 300,$
 $a_3 = 2, b_3 = 5, t_3 = 380,$
 $r_1 = 4, r_2 = 5$

Варіант 5

$a_1 = 2, b_1 = 1, t_1 = 438,$
 $a_2 = 3, b_2 = 6, t_2 = 747,$
 $a_3 = 3, b_3 = 7, t_3 = 812,$
 $r_1 = 7, r_2 = 5$

Варіант 6

$a_1 = 4, b_1 = 3, t_1 = 480,$
 $a_2 = 3, b_2 = 4, t_2 = 444,$
 $a_3 = 2, b_3 = 6, t_3 = 546,$
 $r_1 = 2, r_2 = 4$

Варіант 7

$a_1 = 8, b_1 = 2, t_1 = 840,$
 $a_2 = 6, b_2 = 3, t_2 = 870,$
 $a_3 = 3, b_3 = 2, t_3 = 560,$
 $r_1 = 6, r_2 = 2$

Варіант 8

$a_1 = 5, b_1 = 2, t_1 = 505,$
 $a_2 = 3, b_2 = 3, t_2 = 393,$
 $a_3 = 2, b_3 = 3, t_3 = 348,$
 $r_1 = 7, r_2 = 4$

Варіант 9

$a_1 = 6, b_1 = 2, t_1 = 600,$
 $a_2 = 4, b_2 = 3, t_2 = 520,$
 $a_3 = 3, b_3 = 4, t_3 = 600,$
 $r_1 = 6, r_2 = 3$

Варіант 10

$a_1 = 2, b_1 = 3, t_1 = 428,$
 $a_2 = 3, b_2 = 6, t_2 = 672,$
 $a_3 = 2, b_3 = 8, t_3 = 672,$
 $r_1 = 3, r_2 = 8$

Варіант 11

$a_1 = 3, b_1 = 2, t_1 = 273,$
 $a_2 = 3, b_2 = 3, t_2 = 300,$
 $a_3 = 2, b_3 = 5, t_3 = 380,$
 $r_1 = 4, r_2 = 5$

Варіант 12

$a_1 = 7, b_1 = 3, t_1 = 1365,$
 $a_2 = 6, b_2 = 3, t_2 = 1245,$
 $a_3 = 1, b_3 = 2, t_3 = 650,$
 $r_1 = 6, r_2 = 5$

Варіант 13

$a_1 = 4, b_1 = 3, t_1 = 480,$
 $a_2 = 3, b_2 = 4, t_2 = 444,$
 $a_3 = 2, b_3 = 6, t_3 = 546,$
 $r_1 = 2, r_2 = 4$

Варіант 14

$a_1 = 5, b_1 = 3, t_1 = 750,$
 $a_2 = 4, b_2 = 3, t_2 = 630,$
 $a_3 = 3, b_3 = 4, t_3 = 700,$
 $r_1 = 5, r_2 = 6$

Варіант 15

$a_1 = 5, b_1 = 2, t_1 = 505,$
 $a_2 = 3, b_2 = 3, t_2 = 393,$
 $a_3 = 2, b_3 = 3, t_3 = 348,$
 $r_1 = 7, r_2 = 4$

Варіант 16

$a_1 = 4, b_1 = 3, t_1 = 440,$
 $a_2 = 3, b_2 = 4, t_2 = 393,$
 $a_3 = 3, b_3 = 5, t_3 = 450,$
 $r_1 = 6, r_2 = 5$

Варіант 17

$a_1 = 2, b_1 = 3, t_1 = 428,$
 $a_2 = 3, b_2 = 6, t_2 = 672,$
 $a_3 = 2, b_3 = 8, t_3 = 672,$
 $r_1 = 3, r_2 = 8$

Варіант 18

$a_1 = 2, b_1 = 1, t_1 = 438,$
 $a_2 = 3, b_2 = 6, t_2 = 747,$
 $a_3 = 3, b_3 = 7, t_3 = 812,$
 $r_1 = 7, r_2 = 5$

Варіант 19

$a_1 = 7, b_1 = 3, t_1 = 1365,$
 $a_2 = 6, b_2 = 3, t_2 = 1245,$
 $a_3 = 1, b_3 = 2, t_3 = 650,$
 $r_1 = 6, r_2 = 5$

Варіант 20

$a_1 = 8, b_1 = 2, t_1 = 840,$
 $a_2 = 6, b_2 = 3, t_2 = 870,$
 $a_3 = 3, b_3 = 2, t_3 = 560,$
 $r_1 = 6, r_2 = 2$

Варіант 21

$a_1 = 5, b_1 = 3, t_1 = 750,$
 $a_2 = 4, b_2 = 3, t_2 = 630,$
 $a_3 = 3, b_3 = 4, t_3 = 700,$
 $r_1 = 5, r_2 = 6$

Варіант 22

$a_1 = 6, b_1 = 2, t_1 = 600,$
 $a_2 = 4, b_2 = 3, t_2 = 520,$
 $a_3 = 3, b_3 = 4, t_3 = 600,$
 $r_1 = 6, r_2 = 3$

Варіант 23

$a_1 = 4, b_1 = 3, t_1 = 440,$
 $a_2 = 3, b_2 = 4, t_2 = 393,$
 $a_3 = 3, b_3 = 5, t_3 = 450,$
 $r_1 = 6, r_2 = 5$

Варіант 24

$a_1 = 3, b_1 = 2, t_1 = 273,$
 $a_2 = 3, b_2 = 3, t_2 = 300,$
 $a_3 = 2, b_3 = 5, t_3 = 380,$
 $r_1 = 4, r_2 = 5$

Продовження таблиці 3

Варіант 25

$a_1 = 2, b_1 = 1, t_1 = 438,$
 $a_2 = 3, b_2 = 6, t_2 = 747,$
 $a_3 = 3, b_3 = 7, t_3 = 812,$
 $r_1 = 7, r_2 = 5$

Варіант 26

$a_1 = 4, b_1 = 3, t_1 = 480,$
 $a_2 = 3, b_2 = 4, t_2 = 444,$
 $a_3 = 2, b_3 = 6, t_3 = 546,$
 $r_1 = 2, r_2 = 4$

Варіант 27

$a_1 = 8, b_1 = 2, t_1 = 840,$
 $a_2 = 3, b_2 = 3, t_2 = 393,$
 $a_3 = 2, b_3 = 3, t_3 = 348,$
 $r_1 = 6, r_2 = 4$

Варіант 28

$a_1 = 5, b_1 = 2, t_1 = 505,$
 $a_2 = 6, b_2 = 3, t_2 = 870,$
 $a_3 = 3, b_3 = 2, t_3 = 560,$
 $r_1 = 7, r_2 = 2$

Варіант 29

$a_1 = 2, b_1 = 3, t_1 = 428,$
 $a_2 = 3, b_2 = 6, t_2 = 672,$
 $a_3 = 2, b_3 = 8, t_3 = 672,$
 $r_1 = 3, r_2 = 8$

Варіант 30

$a_1 = 7, b_1 = 3, t_1 = 1365,$
 $a_2 = 6, b_2 = 3, t_2 = 1245,$
 $a_3 = 1, b_3 = 2, t_3 = 650,$
 $r_1 = 6, r_2 = 5$

8 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3. ОПТИМАЛЬНА СУМІШ

Тема. Задача про оптимальну суміш. Необмежена область припустимих розв'язків.

Мета: *набути вмінь складання математичної моделі задачі про оптимальну суміш, формулювання економічного висновку з розв'язку задачі.*

Робота розрахована на 4 години.

8.1 Теоретичні відомості

Задача визначення оптимального складу суміші виникає тоді, коли з наявних видів сировини необхідно одержати шляхом змішування новий продукт (наприклад: бензин, металевий сплав і т. ін.) із заданими технічними й іншими характеристиками, або скласти раціон харчування, маючи зазначені продукти. При цьому потрібно, щоб вартість такої суміші була мінімальною.

Припустимо, що суміш потрібно скласти з n різних видів сировини, кожний з яких містить m видів речовин, що нас цікавлять.

Нехай a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) це кількість i -ої речовини в одиниці j -го виду сировини.

Вартість сировини c_j ($j = 1, \dots, n$). Позначимо через b_i найменшу припустиму кількість i -ої речовини, через d_j - запас сировини j -го виду.

Нехай x_j – кількість сировини j -го виду, яку необхідно використувати для складання суміші. Тоді цільова функція – вартість суміші – дорівнює:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min).$$

Обмеження на вміст необхідних речовин у готовій суміші:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на запаси сировини:

$$x_j \leq d_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Оскільки x_j – кількість сировини, то $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$).

Одержали математичну модель задачі про суміші:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \quad (\min);$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, i = 1, \dots, m; \\ x_j \leq d_j, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, n.$$

8.2 Завдання до лабораторної роботи

Формалізувати задану задачу лінійного програмування. Зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Записати задачу в матричній формі. Перейти до двоїстої задачі. Розв'язати пряму і двоїсту задачу за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати відповіді прямої і двоїстої задач.

Лікувальна дієта контролюється за компонентами: а) білками; б) вуглеводами; в) жирами; г) вітамінами. Обсяг необхідних компонентів у повсякденних продуктах харчування і ціни продуктів зазначені в табл. 4.

Таблиця 4

Склад, од	Продукти			
	1	2	3	4
Білки	s11	s12	s13	s14
Вуглеводи	s21	s22	s23	s24
Жири	s31	s32	s33	s34
Вітаміни	s41	s42	s43	s44
Ціна 1 кг	r1	r2	r3	r4

Скласти план найбільш дешевих закупівель продуктів, що забезпечує дієтичні вимоги.

Звіт про лабораторну роботу

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Запис задачі в матричній формі.
- 4 Роздруківка розв'язання задачі.
- 5 Формалізація двоїстої задачі.
- 6 Роздруківка розв'язання двоїстої задачі.
- 7 Економічний аналіз результату.

8.3 Приклад виконання лабораторної роботи 3

При складанні добового раціону годівлі худоби можна використовувати свіже сіно (не більше 50 кг) і силос (не більше 85 кг). У таблиці 5 наведені дані про вміст зазначених компонентів у 1 кг кожного продукту харчування, поживність раціону (мінімальні норми) і вартість продуктів.

Таблиця 5

Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону
	Свіже сіно	Силос	
Кормові одиниці	0,5	0,5	30 одиниць
Білок, г/кг	40	10	1 кг
Кальцій, г/кг	1,25	2,5	100 г
Фосфор, г/кг	2	1	80 г
Вартість, гр. од.	1,2	0,8	–

Скласти мінімальний за вартістю раціон, що задовольняє вищевикладеним вимогам і.

Формалізація задачі

Нехай x_1 (кг) – кількість сіна, а x_2 (кг) – кількість силосу, який необхідно використовувати в раціоні. Тоді цільова функція – вартість продуктів – дорівнює:

$$F = 1,2x_1 + 0,8x_2 - \min.$$

Складемо систему обмежень.

1 Обмеження на вміст у раціоні кормових одиниць – не менше 30. В одному кілограмі сіна і силосу міститься по 0,5 кормових одиниць. Усього в раціоні буде $(0,5x_1 + 0,5x_2)$ кормових одиниць. Виходить:

$$0,5x_1 + 0,5x_2 \geq 30.$$

2 Обмеження на вміст у раціоні білка – не менше 1 кг. В одному кілограмі сіна міститься 40 г білка, у 1 кг силосу – 10 г білка. Перейдемо до однієї розмірності – кг. Усього в раціоні буде $(0,04x_1 + 0,01x_2)$ кг білка. Виходить:

$$0,04x_1 + 0,01x_2 \geq 1.$$

3 Аналогічно міркуючи, складемо обмеження на вміст кальцію – не менше 0,1 кг:

$$0,00125x_1 + 0,0025x_2 \geq 0,1.$$

4 Вміст фосфору – не менше ніж 0,08 кг:

$$0,002 x_1 + 0,001 x_2 \geq 0,08.$$

6 За умовою, закупівля сіна не повинна перевищувати 50 кг, а силову – 85 кг. Виходить:

$$x_1 \leq 50 \text{ і } x_2 \leq 85.$$

Оскільки x_1 і x_2 – кількість продукту, то x_1 і x_2 невід'ємні.
Одержали математичну модель задачі про суміші:

$$\begin{aligned} F &= 1,2 x_1 + 0,8 x_2 \text{ (min).} \\ 0,5 x_1 + 0,5 x_2 &\geq 30, \\ 0,04 x_1 + 0,01 x_2 &\geq 1, \\ 0,00125 x_1 + 0,0025 x_2 &\geq 0,1, \\ 0,002 x_1 + 0,001 x_2 &\geq 0,08, \\ x_1 &\leq 50, \\ x_2 &\leq 85, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши задачу за допомогою пакета, одержали значення змінних: $x_1 = 20$; $x_2 = 40$; $F_{min} = 56$.

Економічний висновок: у добовому раціоні має бути сіна 20 кг і силову 40 кг. Вартість такого раціону складе 56 гр. од.

Поживність раціону складе:

- кормових одиниць – 30 од. при нормі 30 од.;
- білок – 1,2 кг при нормі 1 кг;
- кальцій – 125 г при нормі 100 г;
- фосфору – 80 г при нормі 80 г.

8.4 Побудова двоїстої задачі до задачі про оптимальну суміш

Формалізована задача про суміші має вигляд:

$$\begin{aligned} F &= 1,2 x_1 + 0,8 x_2 \text{ (min).} \\ 0,5 x_1 + 0,5 x_2 &\geq 30, \\ 0,04 x_1 + 0,01 x_2 &\geq 1, \\ 0,00125 x_1 + 0,0025 x_2 &\geq 0,1, \\ 0,002 x_1 + 0,001 x_2 &\geq 0,08, \\ x_1 &\leq 50, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 &\leq 85, \\x_1 &\geq 0, \\x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Перед побудовою двоїстої задачі запишемо пряму задачу в матричній формі. Приведемо нерівності системи обмежень до одного вигляду (знак $\geq$):

$$\begin{aligned}0,5 x_1 + 0,5 x_2 &\geq 30, \\0,04 x_1 + 0,01 x_2 &\geq 1, \\0,00125 x_1 + 0,0025 x_2 &\geq 0,1, \\0,002 x_1 + 0,001 x_2 &\geq 0,08, \\-x_1 &\geq -50, \\-x_2 &\geq -85.\end{aligned}$$

Випишемо вектори і матрицю:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 0,1 \\ 0,08 \\ -50 \\ -85 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,04 & 0,01 \\ 0,00125 & 0,0025 \\ 0,002 & 0,001 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді:

$$\begin{aligned}F &= \bar{C}^T \cdot \bar{X} \quad (\min). \\ \mathbf{A} \cdot \bar{X} &\geq \bar{B}, \\ \bar{X} &\geq \bar{0}.\end{aligned}$$

Оскільки кількість обмежень прямої задачі – 6, то у двоїстій задачі – 6 змінних.

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,04 & 0,00125 & 0,002 & -1 & 0 \\ 0,5 & 0,01 & 0,0025 & 0,001 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Двоїста задача в матричному вигляді:

$$G = \bar{B}^T \cdot \bar{Y} \quad (\max).$$

$$A^T \cdot \bar{Y} \leq \bar{C},$$

$$\bar{Y} \geq \bar{0}.$$

У координатній формі двоїста задача має вигляд:

$$G = 30 y_1 + y_2 + 0,1 y_3 + 0,08 y_4 - 50 y_5 - 85 y_6 \quad (\max).$$

$$0,5 y_1 + 0,04 y_2 + 0,00125 y_3 + 0,002 y_4 - y_5 \leq 1,2,$$

$$0,5 y_1 + 0,01 y_2 + 0,0025 y_3 + 0,001 y_4 - y_6 \leq 0,8,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 \geq 0.$$

8.5 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple

Для початку розв'язання прямої задачі:

> restart:

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> F:=1.2*x1+0.8*x2;

$$F := 1.2 x_1 + .8 x_2$$

> g1:=0.5*x1+0.5*x2>=30; g2:=0.04*x1+0.01*x2>=1;

g3:=0.00125*x1+0.0025*x2>=0.1; g4:=0.002*x1+0.001*x2>=0.08;

g5:=x1<=50; g6:=x2<=85;

$$g1 := 30 \leq .5 x_1 + .5 x_2$$

$$g2 := 1 \leq .04 x_1 + .01 x_2$$

$$g3 := .1 \leq .00125 x_1 + .0025 x_2$$

$$g4 := .08 \leq .002 x_1 + .001 x_2$$

$$g5 := x_1 \leq 50$$

$$g6 := x_2 \leq 85$$

> minimize(F,{g1,g2,g3,g4,g5,g6},NONNEGATIVE);

$$\{x_2 = 39.99999996, x_1 = 20.00000004\}$$

> x1:=20:x2:=40:F; {g1,g2,g3,g4,g5,g6}; x1:='x1':x2:='x2':

$$56.0$$

$$\{.1 \leq .12500, .08 \leq .080, 20 \leq 50, 40 \leq 85, 30 \leq 30.0, 1 \leq 1.20\}$$

Оскільки задача є двовимірною, то можна розв'язати її графічно:

> with(plots):

Warning, the names changecoords and display have been redefined

> inequal({g1,g2,g3,g4,g5,g6,x1>=0, x2>=0}, x1=0..100, x2=0..100, optionsexcluded=(color=white));

Результат виконання цієї команди – на рис. 14.

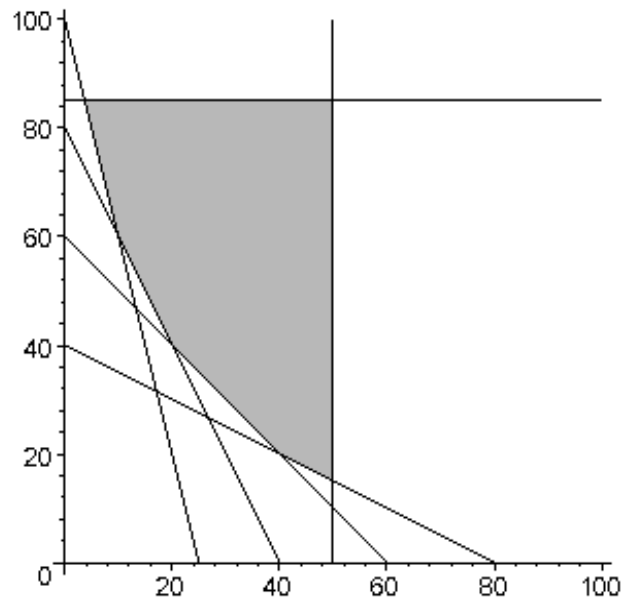


Рисунок 14

Розв'яжемо двоїсту задачу:

> restart:

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> G:=30*y1+y2+0.1*y3+0.08*y4-50*y5-85*y6;

$G := 30 y_1 + y_2 + .1 y_3 + .08 y_4 - 50 y_5 - 85 y_6$

> d1:=0.5*y1+0.04*y2+0.00125*y3+0.002*y4-y5<=1.2;

d2:=0.5*y1+0.01*y2+0.0025*y3+0.001*y4-y6<=0.8;

$d1 := .5 y_1 + .04 y_2 + .00125 y_3 + .002 y_4 - y_5 \leq 1.2$

$d2 := .5 y_1 + .01 y_2 + .0025 y_3 + .001 y_4 - y_6 \leq .8$

> maximize(G, {d1,d2},NONNEGATIVE);

{ y3 = 0., y2 = 0., y4 = 400.0000000, y1 = .8000000000, y6 = 0., y5 = 0. }

> y1:=0.8:y2:=0:y3:=0:y4:=400:y5:=0:y6:=0:G:{d1,d2};

56.00

{ .800 ≤ .8, 1.200 ≤ 1.2 }

8.6 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 3

Таблиця 6 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 3

Варіант 1 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (4, 6, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 40.	Варіант 2 $S = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 7, 2, 1)$ Обмеження: білки – не менше 18; вуглеводи – не менше 27; жири – не менше 11 і не більше 55; вітаміни – не менше 41.
Варіант 3 $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 2 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (1, 2, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 33; жири – не менше 12и не більше 65; вітаміни – не менше 34.	Варіант 4 $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 2, 1, 4).$ Обмеження: білки – не менше 24; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 15 і не більше 45; вітаміни – не менше 37.
Варіант 5 $S = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (4, 6, 5, 3).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 40.	Варіант 6 $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, R = (3, 3, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 15; вуглеводи – не менше 25; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 30 .

Варіант 7 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (2, 6, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 30; вуглеводи – не менше 40; жири – не менше 20 і не більш 70; вітаміни – не менше 35 їж.	Варіант 8 $S = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 5, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 34; жири – не менше 15 і не більш 65; вітаміни – не менше 40.
Варіант 9 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (2, 3, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 31; жири – не менше 11 і не більше 51; вітаміни – не менше 41.	Варіант 10 $S = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 1, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 22; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 12 і не більше 52; вітаміни – не менше 42.
Варіант 11 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (4, 6, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 40.	Варіант 12 $S = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 7, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 18; вуглеводи – не менше 27; жири – не менше 11 і не більше 55; вітаміни – не менше 41.

Варіант 13 $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 2 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (1, 2, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 33; жири – не менше 12 і не більше 65; вітаміни – не менше 34.	Варіант 14 $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 2, 1, 4).$ Обмеження: білки – не менше 24; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 15 і не більше 45; вітаміни – не менше 37.
Варіант 15 $S = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (4, 6, 5, 3).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 40.	Варіант 16 $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, R = (3, 3, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 15; вуглеводи – не менше 25; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 30.
Варіант 17 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (2, 6, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 30; вуглеводи – не менше 40; жири – не менше 20 і не більше 70; вітаміни – не менше 35.	Варіант 18 $S = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 5, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 34; жири – не менше 15 і не більше 65; вітаміни – не менше 40.

Варіант 19 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (2, 3, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 31; жири – не менше 11 і не більше 51; вітаміни – не менше 41.	Варіант 20 $S = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 1, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 22; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 12 і не більше 52; вітаміни – не менше 42.
Варіант 21 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 1 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (4, 6, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 40.	Варіант 22 $S = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 7, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 18; вуглеводи – не менше 27; жири – не менше 11 і не більше 55; вітаміни – не менше 41.
Варіант 23 $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 12 & 2 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (1, 2, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 33; жири – не менше 12 і не більше 65; вітаміни – не менше 34.	Варіант 24 $S = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 2 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 2, 1, 4).$ Обмеження: білки – не менше 24; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 15 і не більше 45; вітаміни – не менше 37.

Варіант 25 $S = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 10 & 2 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (4, 6, 5, 3).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 30; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 40.	Варіант 26 $S = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, R = (3, 3, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 15; вуглеводи – не менше 25; жири – не менше 10 і не більше 50; вітаміни – не менше 30.
Варіант 27 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (2, 6, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 30; вуглеводи – не менше 40; жири – не менше 20 і не більше 70; вітаміни – не менше 35.	Варіант 28 $S = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 5, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 20; вуглеводи – не менше 34; жири – не менше 15 і не більше 65; вітаміни – не менше 40.
Варіант 29 $S = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 10 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (2, 3, 2, 3).$ Обмеження: білки – не менше 21; вуглеводи – не менше 31; жири – не менше 11 і не більше 51; вітаміни – не менше 41.	Варіант 30 $S = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 4 \\ 13 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, R = (3, 1, 2, 1).$ Обмеження: білки – не менше 22; вуглеводи – не менше 32; жири – не менше 12 і не більше 52; вітаміни – не менше 42.

9 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Транспортна задача – задача про найбільш ощадливий план перевезень однорідного чи взаємозамінного вантажу з пунктів відправлення в пункти споживання – є найважливішою частковою задачею лінійного програмування, що має велике практичне застосування не тільки до проблем транспорту. Транспортна задача виділяється в окрему задачу лінійного програмування визначеністю економічного змісту й особливостями математичної моделі.

9.1 Загальне формулювання транспортної задачі

Однорідний вантаж, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях $a_i \geq 0$ у кожному i -му пункті відправлення ($i = 1, \dots, m$), необхідно доставити в кожний з n пунктів призначення в кількостях $b_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$). Вартість перевезення одиниці вантажу з i -го вихідного пункту в j -й пункт призначення дорівнює c_{ij} .

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту відправлення i у пункт призначення j .

Потрібно скласти план перевезень так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

Для наочності дані задачі заведено оформляти у вигляді таблиці 7.

Таблиця 7

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення							
		B_1		...	B_i		...	B_n	
A_1	a_1	x_{11}	c_{11}	...	x_{1i}	c_{1i}	...	x_{1n}	c_{1n}
...	...	...		...	...		...	...	
A_i	a_i	x_{i1}	c_{i1}	...	x_{ij}	c_{ij}	...	x_{in}	c_{in}
...	...	...		...	...		...	...	
A_m	a_m	x_{m1}	c_{m1}	...	x_{mj}	c_{mj}	...	x_{mn}	c_{mn}
Потреби		b_1		...	b_j		...	b_n	

Оскільки розглядається однорідний вантаж, потреби пункту призначення можуть задовольнятися за рахунок будь-яких вихідних пунктів.

Розрізняють два типи транспортних задач: закриті, у яких сумарний попит дорівнює сумарним запасам, тобто $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, і відкриті, у яких

сумарний попит менше сумарних запасів, тобто $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$.

Дано математичне формулювання транспортної задачі закритого типу.

Цільова функція – вартість перевезень:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

Обмеження на запаси (усі запаси потрібно вивезти):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на потреби (усі потреби потрібно задовольнити):

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n.$$

Оскільки x_{ij} – кількість перевезеного вантажу, то $x_{ij} \geq 0$.

Одержали математичну модель замкнутої транспортної задачі:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Для відкритої задачі математична модель будується аналогічно, крім обмежень на запаси (якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m.$$

9.2 Задачі, що зводяться до транспортних

При розгляді транспортної задачі вказувалося, що до схеми транспортної задачі відноситься більш широке коло задач, ніж власне транспортні задачі.

Розглянемо коротко задачі, моделі яких подібні до транспортної.

9.2.1 Задача про укладання контрактів

Усякий раз, коли організації потрібно одержати товари з приватних джерел, виробники цих товарів беруть участь у складанні контрактів. Вони пропонують свої умови, у яких указують:

- а) ціну одиниці товару;
- б) максимальну й мінімальну кількість кожного товару, що можуть бути поставлені за зазначеною ціною;
- в) інші умови.

Запропоновані умови відбивають бажання виробника дістати прибуток. Організація повинна укласти контракти так, щоб загальні витрати були мінімальними.

При цьому враховуються транспортні й інші витрати, пов'язані з кожною пропозицією.

Розглянемо просту задачу про укомплектування складів.

Є m постачальників, готових узяти участь в укомплектуванні n складів. Кожен постачальник готовий поставити продукції в кількостях $a_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$). Кожному складу потрібно продукції в кількостях $b_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$). Придбання і доставка одиниці продукції від i -го постачальника на j -ий склад дорівнює c_{ij} .

Нехай x_{ij} – кількість продукції, перевезеної від i -го постачальника на j -й склад.

Потрібно скласти план перевезень так, щоб витрати були мінімальними.

Для наочності дані задачі заведено оформляти у вигляді таблиці 8.

Таблиця 8

Постачальники	Запаси	Склади							
		B_1		...	B_j		...	B_n	
A_1	a_1	x_{11}	c_{11}	...	x_{1j}	c_{1j}	...	x_{1n}	c_{1n}
...	...	...		...	...		...	...	
A_i	a_i	x_{i1}	c_{i1}	...	x_{ij}	c_{ij}	...	x_{in}	c_{in}
...	...	...		...	...		...	...	
A_m	a_m	x_{m1}	c_{m1}	...	x_{mj}	c_{mj}	...	x_{mn}	c_{mn}
Потреби		b_1		...	b_j		...	b_n	

Дано математичне формулювання задачі:

Цільова функція – вартість комплектації: $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$

Обмеження на запаси: потрібно замовити продукції не більше, ніж є в запасі:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на потреби: на складі потрібно одержати необхідну норму продукції:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n.$$

Оскільки x_{ij} – кількість продукції, то $x_{ij} \geq 0$.

Одержали математичну модель, ідентичну моделі транспортної задачі.

9.2.2 Задача розподілу устаткування

Припустимо, на підприємстві є m верстатів різної потужності a_i ($i = 1, \dots, m$), на яких може виготовлятися кожен з n видів виробів. Відомі витрати c_{ij} у грошових одиницях на виготовлення одиниці j -го виробу при виробництві його на i -ому верстаті, а також відома продуктивність p_{ij} (од./год.) i -го верстата при виробництві j -го виробу ($j = 1, \dots, n$). Відомо планове завдання по виробництву виробів b_j ($j = 1, \dots, n$).

Потрібно розподілити виробництво виробів на різних верстатах так, щоб мінімізувати сумарні витрати при виконанні планового завдання..

Подано умову у вигляді таблиці 9.

Таблиця 9

Верстат	Ресурс, вер-стато-год.	Витрати на одиницю виробу										
		B ₁			...	B _j			...	B _n		
A ₁	a ₁	x ₁₁	p ₁₁	c ₁₁	...	x _{1j}	p _{1j}	c _{1j}	...	x _{1n}	p _{1n}	c _{1n}
...	...	...			...	...			...	...		
A _i	a _i	x _{i1}	p _{i1}	c _{i1}	...	x _{ij}	p _{ij}	c _{ij}	...	x _{in}	p _{in}	c _{in}
...	...	...			...	...			...	...		
A _m	a _m	x _{m1}	p _{m1}	c _{m1}	...	x _{mj}	p _{mj}	c _{mj}	...	x _{mn}	p _{mn}	c _{mn}
Потреби		b ₁			...	b _i			...	b _n		

Числа x_{ij} – час, впродовж якого i -й верстат зайнятий виробництвом j -го виробу.

Дано математичне формулювання задачі.

Нехай x_{ij} – час, впродовж якого i -й верстат зайнятий виробництвом j -го виробу. Тоді цільова функція – сумарні витрати:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot p_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

Обмеження на ресурси верстатів (витрати ресурсу кожного верстата на виробництво – не більше наявних):

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m.$$

Обмеження на виконання планового завдання (випуск виробів – не менше плану):

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, n.$$

Оскільки x_{ij} – час роботи верстатів, то $x_{ij} \geq 0$.

Одержали математичну модель задачі розподілу устаткування, аналогічну транспортній моделі:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot p_{ij} \cdot x_{ij} \quad (\min).$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m p_{ij} \cdot x_{ij} \geq b_j, j = 1, \dots, n, \\ x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

10 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Тема. Транспортна задача (відкрита і замкнута). Задачі, що зводяться до транспортної (задача про закладення контракту, задача розподілу устаткування).

Мета: *набути вмінь визначення змінних для транспортної задачі, визначення типу транспортної задачі, здійснювати економічний аналіз особливостей відкритої і замкнутої задач; засвоїти поняття відкритої і замкнутої задач.*

Робота розрахована на 4 години.

10.1 Завдання до лабораторної роботи 4

Записати умову задачі у вигляді таблиці. Формалізувати задачу. Визначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Перейти до двоїстої задачі. Розв'язати пряму і двоїсту задачі за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати розв'язки прямої і двоїстої задач. Отриманий розв'язок прямої задачі оформити у вигляді таблиці для перевірки виконання обмежень. Зробити порівняння значень цільової функції замкнутої задачі $F_{\text{замк}}$ із значенням цільової функції відкритої задачі $F_{\text{відкр}}$. Зробити економічний висновок.

На дві бази A_1 і A_2 надійшов однорідний вантаж у кількості a_1 т на базу A_1 і a_2 т на базу A_2 . Отриманий вантаж потрібно перевезти у три пункти: b_1 т у пункт B_1 , b_2 т у пункт B_2 , b_3 т у пункт B_3 . Відстані між пунктами відправлення і пунктами призначення зазначені в матриці R . Скласти план перевезень із мінімальними витратами. Вартість одного тонно-кілометра прийняти за одиницю.

1 Розв'язати задачу при заданих запасах і потребах.

2 Збільшити запаси на 10%. Додаткову кількість запасів довільно розподілити між пунктами A_1 і A_2 . Потреби залишаються без змін. Розв'язати задачу з новими умовами.

Звіт про лабораторну роботу

1 Умова задачі.

2 Формалізація задачі.

3 Запис задачі в матричній формі (якщо це можливо).

4 Роздруківка розв'язання задачі.

5 Формалізація двоїстої задачі.

6 Роздруківка розв'язання двоїстої задачі.

7 Економічний аналіз результату.

10.2 Приклад виконання лабораторної роботи 4

10.2.1 Розв'язання замкнутої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2, m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці 10.

Таблиця 10

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	100	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	150	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту A_i до пункту B_j. Перевіримо відповідність запасів і потреб:

$$100 + 150 = 250 = 120 + 130 = 250.$$

Задача замкнута. Цільова функція F дорівнює вартості всіх перевезень:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min).}$$

Система обмежень визначається такими умовами:

а) кількість вантажів, що вивозяться, дорівнює запасам:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} &= 100, \\x_{21} + x_{22} &= 150;\end{aligned}$$

б) кількість ввезених вантажів дорівнює потребам:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &= 120, \\x_{12} + x_{22} &= 130,\end{aligned}$$

в) кількість вантажів, що вивозяться, не може бути від'ємною:

$$x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0.$$

Одержали формалізовану задачу:

$$\begin{aligned}F &= 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min).} \\x_{11} + x_{12} &= 100,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{21} + x_{22} &= 150, \\
x_{11} + x_{21} &= 120, \\
x_{12} + x_{22} &= 130, \\
x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0.
\end{aligned}$$

Запишемо задачу в матричному вигляді.

Випишемо рівняння, що відповідають системі обмежень:

$$\begin{cases}
x_{11} + x_{12} & & & = 100, \\
& x_{21} + x_{22} & & = 150, \\
x_{11} & & x_{21} & = 120, \\
& x_{12} + & x_{22} & = 130.
\end{cases}$$

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді:

$$F = \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{X}} \quad (\min).$$

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}},$$

$$\bar{\mathbf{X}} \geq \bar{\mathbf{0}}.$$

Складемо двоїсту задачу.

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Пряма задача – задача канонічного типу, усі обмеження – рівності.

У двоїстій задачі всі змінні довільного знака.

У матричному вигляді:

$$G = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{Y}} \quad (\max).$$

$$\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Y}} \leq \bar{\mathbf{C}}.$$

Випишемо формалізовану задачу:

$$G = 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + y_4 \leq 2, \\ y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_2 + y_4 \leq 6. \end{cases}$$

Розв'язавши задачу за допомогою пакета, одержали:

$$x_{11} = 0; \quad x_{12} = 100; \quad x_{21} = 120; \quad x_{22} = 30; \quad F = 740.$$

Мінімальна вартість перевезення вантажу – 740 гр. од. Переміщення вантажу від постачальників до споживачів оформимо у вигляді таблиці розподілу (табл. 11).

Таблиця 11

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
		B ₁	B ₂
A ₁	100	0	100
A ₂	150	120	30
Потреби		120	130

З таблиці видно, що всі потреби задоволені і всі запаси вивезені.

Розв'язання двоїстої задачі: $y_1 = -4$; $y_2 = 0$; $y_3 = -3$; $y_4 = 6$; $G = 740$.

Цільові функції прямої і двоїстої задач рівні, тобто задача вирішена вірно.

10.2.2 Розв'язання замкнутої задачі за допомогою пакета Maple

Для початку розв'язання прямої задачі:

```
> restart;
> with(simplex):
Warning, the protected names maximize and
minimize have been redefined and unprotected
> F:=4*x11+2*x12+3*x21+6*x22;
      F := 4 x11 + 2 x12 + 3 x21 + 6 x22
> g1:=x11+x12=100; g2:=x21+x22=150; g3:=x11+x21=120;
g4:=x12+x22=130;
```

```

g1 := x11 + x12 = 100
g2 := x21 + x22 = 150
g3 := x11 + x21 = 120
g4 := x12 + x22 = 130
> minimize(F, {g1,g2,g3,g4},NONNEGATIVE);
      { x11 = 0, x22 = 30, x12 = 100, x21 = 120 }
> x11:=0:x12:=100:x21:=120:x22:=30:F;{g1,g2,g3,g4};
      740
      { 100 = 100, 150 = 150, 120 = 120, 130 = 130 }

```

Розв'язання двоїстої задачі:

```

> restart:
> with(simplex):
> G:=100*y1+150*y2+120*y3+130*y4;
      G := 100 y1 + 150 y2 + 120 y3 + 130 y4
> d1:=y1+y3<=4; d2:=y1+y4<=2; d3:=y2+y3<=3; d4:=y2+y4<=6;
      d1 := y1 + y3 ≤ 4
      d2 := y1 + y4 ≤ 2
      d3 := y2 + y3 ≤ 3
      d4 := y2 + y4 ≤ 6
> maximize(G,{d1,d2,d3,d4});
      { y1 = 2, y2 = 6, y3 = -3, y4 = 0 }
> y1:=2:y2:=6:y3:= -3:y4:=0:G;{d1,d2,d3,d4};
      740
      { 2 ≤ 2, -1 ≤ 4, 3 ≤ 3, 6 ≤ 6 }

```

10.2.3 Розв'язання відкритої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці 12.

Таблиця 12

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B ₁		B ₂	
A ₁	120	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	180	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту A_i до пункту B_j .
Перевіримо відповідність запасів і потреб:

$$(120 + 180 = 300) > (120 + 130 = 250).$$

Задача відкрита.

Цільова функція F дорівнює вартості всіх перевезень:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min)}.$$

Система обмежень визначається наступними умовами:

а) кількість вантажів, що вивозяться, не більше запасів:

$$x_{11} + x_{12} \leq 120,$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180;$$

б) кількість ввезених вантажів дорівнює потребам:

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} = 130;$$

в) кількість вантажів, що вивозяться, не може бути від'ємною:

$$x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0.$$

Одержали формалізовану задачу:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \text{ (min)}.$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 120,$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180,$$

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$

$$x_{12} + x_{22} = 130,$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0.$$

Випишемо систему обмежень, змінивши знак нерівності в першому і другому обмеженнях:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x_{11} & - & x_{12} & \geq & -120, \\ & & -x_{21} & - & x_{22} & \geq & -180, \\ x_{11} & + & & x_{21} & = & 120, \\ & & x_{12} & + & & x_{22} & = & 130. \end{array} \right.$$

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -120 \\ -180 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

У матричному вигляді задачу не можна подати, тому що це задача загального виду.

Складемо двоїсту задачу.

Випишемо матрицю і вектори:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} -120 \\ -180 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Пряма задача – задача загального виду. У прямій задачі перше і друге обмеження – нерівність, у двоїстій задачі $y_1 \geq 0$ і $y_2 \geq 0$, а y_3 і y_4 – довільні знаки.

Випишемо формалізовану задачу:

$$G = -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 4, \\ -y_1 + y_4 \leq 2, \\ -y_2 + y_3 \leq 3, \\ -y_2 + y_4 \leq 6, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,$$

$$y_2 \geq 0.$$

Розв'язавши задачу за допомогою пакета, одержали: $x_{11} = 0$; $x_{12} = 120$; $x_{21} = 120$; $x_{22} = 10$; $F = 660$.

Мінімальна вартість перевезення вантажу – 660 гр. од. Переміщення вантажу від постачальників до споживачів оформимо у вигляді таблиці розподілу (табл. 13).

З таблиці видно, що всі потреби задовільнено.

Розв'язання двоїстої задачі: $y_1 = 4$; $y_2 = 0$; $y_3 = 3$; $y_4 = 6$; $G = 660$.

Цільові функції прямої і двоїстої задач рівні, значить задача вирішена вірно.

Таблиця 13

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення		Залишок
		B_1	B_2	
A_1	120	0	120	0
A_2	180	120	10	50
Потреби		120	130	

Зауваження. При однакових потребах і тарифах перевезень, вартість перевезення для відкритої задачі менше, ніж для замкнутої ($660 < 740$). Це пояснюється тим, що при надлишку запасів з'являється воля маневру, тобто вантаж можна вивозити переважно з тих пунктів, де більш дешеві тарифи.

10.2.4 Розв'язання відкритої задачі за допомогою пакета Maple

Для початку розв'язання прямої задачі:

> restart:

> with(simplex):

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> F:=4*x11+2*x12+3*x21+6*x22;

$$F := 4 x_{11} + 2 x_{12} + 3 x_{21} + 6 x_{22}$$

> g1:=x11+x12<=120; g2:=x21+x22<=180; g3:=x11+x21=120;

g4:=x12+x22=130;

$$g1 := x_{11} + x_{12} \leq 120$$

$$g2 := x_{21} + x_{22} \leq 180$$

$$g3 := x_{11} + x_{21} = 120$$

$$g4 := x_{12} + x_{22} = 130$$

> minimize(F,{g1,g2,g3,g4},NONNEGATIVE);

$$\{ x_{11} = 0, x_{22} = 10, x_{21} = 120, x_{12} = 120 \}$$

> x11:=0:x12:=120:x21:=120:x22:=10:F;{g1,g2,g3,g4};

$$660$$

$$\{ 120 \leq 120, 130 \leq 180, 120 = 120, 130 = 130 \}$$

Розв'язання двоїстої задачі:

> restart:

> with(simplex):

> G:= -120*y1-180*y2+120*y3+130*y4;

$$G := -120 y_1 - 180 y_2 + 120 y_3 + 130 y_4$$

```

> d1:= -y1+y3<=4; d2:= -y1+y4<=2; d3:= -y2+y3<=3; d4:= -y2+y4<=6;
    d1 := -y1 + y3 ≤ 4
    d2 := -y1 + y4 ≤ 2
    d3 := -y2 + y3 ≤ 3
    d4 := -y2 + y4 ≤ 6
> maximize(G,{d1,d2,d3,d4,y1>=0,y2>=0});
    {y2 = 0, y1 = 4, y3 = 3, y4 = 6 }
> y1:=4:y2:=0:y3:=3:y4:=6:G,{d1,d2,d3,d4};
    660
    { -1 ≤ 4, 3 ≤ 3, 6 ≤ 6, 2 ≤ 2 }

```

10.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 4

Таблиця 14 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 4

Варіант	a1	a2	b1	b2	b3	R
1	200	150	190	100	60	12, 15, 21, 14, 8, 15
2	150	200	140	100	110	8, 20, 7, 4, 14, 12
3	150	150	100	100	100	20, 3, 9, 14, 10, 12
4	250	250	150	170	180	13, 7, 16, 20, 9, 6
5	220	200	150	100	170	20, 17, 13, 6, 10, 9
6	200	230	190	100	140	12, 5, 16, 14, 10, 8
7	200	300	140	150	210	6, 11, 10, 17, 6, 4
8	200	250	190	150	110	6, 1, 7, 13, 4, 9
9	150	250	180	120	100	14, 6, 4, 17, 10, 9
10	250	200	180	100	170	12, 8, 21, 13, 4, 15
11	200	280	180	170	130	12, 21, 10, 13, 15, 13
12	200	200	170	120	110	28, 12, 7, 15, 14, 12
13	210	220	130	140	160	7, 3, 9, 34, 10, 12

Продовження таблиці 14

Варіант	a1	a2	b1	b2	b3	R
14	150	180	110	120	100	34, 10, 12, 6, 5, 14
15	160	280	180	120	140	6, 13, 14, 25, 14, 7
16	260	240	170	160	170	4, 7, 8, 15, 11, 21
17	250	270	150	170	200	9, 16, 10, 12, 18, 12
18	250	200	175	125	150	5, 13, 18, 6, 10, 15
19	250	200	140	160	150	9, 15, 35, 15, 35, 12
20	230	250	180	170	130	13, 9, 5, 14, 5, 12
21	100	150	90	110	50	15, 21, 14, 8, 17, 11
22	150	150	110	90	100	8, 20, 8, 4, 14, 12
23	200	190	130	160	100	20, 13, 15, 14, 10, 20
24	250	200	110	190	150	13, 7, 16, 20, 9, 6
25	220	280	150	170	180	10, 17, 13, 6, 10, 9
26	230	200	180	150	100	11, 5, 16, 14, 10, 8
27	230	320	200	180	170	6, 11, 12, 17, 6, 4
28	210	130	120	120	100	9, 6, 17, 13, 4, 9
29	150	140	90	110	90	14, 6, 14, 17, 10, 9
30	220	130	100	120	130	12, 8, 21, 13, 4, 15

11 ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Припустимо, що матеріальне виробництво поділяється на n галузей. Плановий обсяг валової продукції кожної галузі позначимо $x_1, x_2, \dots, x_n$. Кожна з галузей для виробництва своєї продукції частково витрачає власні кошти, а частково використовує кошти, одержані від інших галузей. *Задача міжгалузевого балансу* полягає в такому плануванні виробництва, щоб забезпечити максимальний сумарний прибуток по всіх галузях.

Витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі задаються матрицею коефіцієнтів витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи a_{ij} матриці A можуть мати подвійний сенс:

1 a_{ij} – витрати продукції i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі (бартер).

2 a_{ij} – розмір капіталовкладень з фондів накопичень i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі.

Ціни на одиницю продукції кожної галузі задані:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язання задачі залежить від змісту матриці A .

11.1 Задача типу 1: a_{ij} – витрати продукції

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ої галузі ($i = 1, \dots, n$). На власне виробництво 1-а галузь споживає $a_{11}x_1$ виробленої нею продукції. На виробництво x_2 товарів 2-ої галузі піде $a_{12}x_2$ продукції 1-ої галузі і т. д., а на виробництво x_n товарів n -ої галузі піде $a_{1n}x_n$ продукції 1-ої галузі. Разом буде ви-

трачено $\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j$ виробленої продукції. Кількість продукції, що залишилася для продажу, буде дорівнювати:

$$K_1 = x_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j.$$

Аналогічно визначається кінцева кількість продукції для кожної галузі:

$$K_i = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Величини K_i називаються кінцевим продуктом i -ої галузі.

Цільова функція – це ціна всієї проданої продукції:

$$F = \sum_{i=1}^n c_i K_i \quad (\max).$$

Система обмежень задачі визначається такими умовами:

- 1 Обмеженістю виробничих потужностей, тобто обмеження на валовий випуск продукції x_i .
- 2 Обмеженістю ринкового попиту, тобто обмеження на кінцевий продукт K_i .
- 3 Асортиментними обмеженнями типу $K_1 : K_2 = 1 : 4$ (наприклад, до одного автомобіля – чотири колеса).
- 4 Невід’ємністю величин кінцевого продукту, тому що не можна витратити більше, ніж вироблено.

11.2 Задача типу 2: a_{ij} – витрати в грошовому вираженні

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ої галузі ($i = 1, \dots, n$). У даному випадку кінцевий продукт збігається з валовим продуктом $k_i = x_i$. Але від виторгу $c_i x_i$ i -ої галузі від продажу виробленого продукту потрібно відняти суми, витрачені на виробництво товарів усіх галузей $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Тому прибуток i -ої галузі буде дорівнювати:

$$P_i = c_i x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Цільова функція – це ціна всієї проданої продукції:

$$F = \sum_{i=1}^n P_i \quad (\max).$$

Система обмежень задачі 2 визначається тими самими обмеженнями (1–4), що і для задачі 1, але з'являється додаткове обмеження, пов'язане з розмірами фондів накопичення галузей D_i .

Витрати на виробництво не можуть перевищувати розмірів фонду накопичення:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq D_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

12 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5. ЗАДАЧА МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ

Тема. Задача міжгалузевого балансу.

Мета: *набути **вмін** складання математичної моделі задачі міжгалузевого балансу для двох типів задач: матриця коефіцієнтів витрат – витрати продукції, матриця коефіцієнтів витрат – розмір капіталовкладень; засвоїти **поняття** задачі міжгалузевого балансу; матриці коефіцієнтів витрат.*

Робота розрахована на 4 години.

12.1 Завдання до лабораторної роботи 5

Формалізувати задачу. Зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Перейти до двоїстої задачі. Розв'язати пряму і двоїсту задачу за допомогою одного з пакетів. Проаналізувати розв'язки прямої і двоїстої задач. Зробити економічний висновок.

Є тригалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів витрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі (у товарному або грошовому вираженні). Фонди накопичення галузей задані числами d_1, d_2, d_3 .

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами r_1, r_2, r_3 . Ціна одиниці кінцевого продукту 1, 2 і 3 галузей дорівнює відповідно: c_1, c_2, c_3 .

Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт накладаються деякі обмеження.

Звіт про лабораторну роботу

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Роздруківка розв'язання задачі.
- 4 Формалізація двоїстої задачі.
- 5 Роздруківка розв'язання двоїстої задачі.
- 6 Економічний аналіз результату.

12.2 Приклад виконання лабораторної роботи 5

12.2.1 Приклад 1 (a_{ij} – витрати в грошовому вираженні)

Є двогалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,22 & 0,15 \end{pmatrix}$, де a_{ij} – витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі в грошовому вираженні.

Фонди накопичення галузей задані: $d_1 = 400$, $d_2 = 200$. Виробничі потужності галузей, що обмежують можливості їхнього валового випуску, задані числами: $r_1 = 350$, $r_2 = 280$. Ціни одиниці кінцевого продукту i -ої галузі задані числами: $c_1 = 8$, $c_2 = 7$.

Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт K_i i -ої галузі накладається обмеження $K_1 : K_2 = 3 : 4$.

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ої галузі ($i = 1, 2$). Оскільки на власне виробництво, а також на виробництво продукції 2-ої галузі перша галузь вироблену продукцію не витрачає, сумарний кінцевий продукт дорівнює виробленій продукції: $K_1 = x_1$.

Уся вироблена продукція буде продана і виторг складе $c_1 x_1$.

Щоб визначити прибуток 1-ої галузі, з отриманого нею виторгу потрібно відняти суми, витрачені на виробництво продукції 1-ої і 2-ої галузей:

$$P_1 = c_1 x_1 - (a_{11} x_1 + a_{12} x_2).$$

Аналогічно для 2-ої галузі:

$$K_2 = x_2, \quad P_2 = c_2 x_2 - (a_{21} x_1 + a_{22} x_2).$$

Підставляючи числові значення, одержимо вигляд прибутку 1-ої і 2-ої галузей:

$$P_1 = 8x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2), \quad P_2 = 7x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2).$$

Сумарний прибуток об'єднання дорівнює $P_1 + P_2$. Отже, цільова функція задачі така:

$$F = 8x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2) + 7x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2) \quad (\max).$$

Після зведення подібних членів, одержимо:

$$F = 7,62x_1 + 6,45x_2 \quad (\max).$$

Обмеження задачі

1 За фондами накопичення:

$$\begin{aligned}0,01x_1 + 0,2x_2 &\leq 400, \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 &\leq 200.\end{aligned}$$

2 За комплектністю:

$$K_1 : K_2 = 3 : 4.$$

Ця умова дорівнює умові $K_1 = \frac{3}{4}K_2$, тобто умові $x_1 = \frac{3}{4}x_2$ або

$$x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0.$$

3 За виробничими потужностями: $x_1 \leq 350$, $x_2 \leq 280$.

4 Випуск продукції: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Формалізована задача має вигляд:

$$\begin{aligned}F &= 7,62x_1 + 6,45x_2 \quad (\max); \\ \left\{ \begin{aligned} 0,01x_1 + 0,2x_2 &\leq 400, \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 &\leq 200, \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 &= 0, \\ x_1 &\leq 350, \\ x_2 &\leq 280, \end{aligned} \right. \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

12.2.2 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple

```
> restart;
> with(simplex):
Warning, the protected names maximize and
minimize have been redefined and unprotected
> F:=7.62*x1+6.45*x2;
      F := 7.62 x1 + 6.45 x2
> g1:=0.01*x1+0.2*x2<=400; g2:=0.22*x1+0.15*x2<=200;
g3:=x1-3/4*x2=0; g4:=x1<=350; g5:=x2<=280;
      g1 := .01 x1 + .2 x2 ≤ 400
      g2 := .22 x1 + .15 x2 ≤ 200
```

$$g3 := x1 - \frac{3}{4}x2 = 0$$

$$g4 := x1 \leq 350$$

$$g5 := x2 \leq 280$$

> **maximize(F,{g1,g2,g3,g4,g5},NONNEGATIVE);**

{ x1 = 210., x2 = 280. }

> **x1:=210:x2:=280:F;{g1,g2,g3,g4,g5};**

3406.20

{ 0 = 0, 58.10 ≤ 400, 88.20 ≤ 200, 210 ≤ 350, 280 ≤ 280 }

12.2.3 Приклад 2 (a_{ij} – витрати продукції)

Є двогалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів витрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,22 & 0,15 \end{pmatrix}$, де a_{ij} – витрати i -ої галузі на виробництво одиниці продукції j -ої галузі в товарному вираженні:

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами: $r_1 = 350$, $r_2 = 280$. Ціни одиниці кінцевого продукту i -ої галузі задані числами: $c_1 = 8$, $c_2 = 7$.

Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт K_i i -ої галузі накладається обмеження $K_2 \leq 50$.

Формалізація задачі

Нехай x_i – валовий випуск i -ої галузі ($i = 1, 2$). На власне виробництво 1-а галузь витратить $a_{11}x_1$ виробленої нею продукції. На виробництво x_2 товарів 2-ої галузі піде $a_{12}x_2$ продукції 1-ої галузі. Разом буде витрачено $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ виробленої продукції. Кількість продукції, що залишилася для продажу, буде дорівнювати:

$$K_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2).$$

Аналогічно визначається кінцева кількість продукції 2-ої галузі:

$$K_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2).$$

Підставляючи конкретні числові значення, одержимо:

$$K_1 = x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2),$$

$$K_2 = x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2).$$

Цільова функція – це ціна всієї проданої продукції:

$$F = c_1 K_1 + c_2 K_2 \quad (\max).$$

Підставляючи в останню формулу значення c_1 , c_2 і вирази K_1 , K_2 , одержуємо вираз для цільової функції:

$$F = 8 (x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2)) + 7 (x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2)) \quad (\max).$$

Після зведення подібних членів подібні члени, одержимо:

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \quad (\max).$$

Обмеження задачі:

1 За кількістю кінцевого продукту (обмеження $K_2 \leq 50$).

Умова $K_2 \leq 50$ означає:

$$x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2) \leq 50,$$

що дає

$$-0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50.$$

2 За виробничими потужностями:

$$x_1 \leq 350, \quad x_2 \leq 280.$$

3 Кількість кінцевого продукту невід'ємна:

$$K_1 \geq 0, \quad K_2 \geq 0;$$

$$x_1 - (0,1x_1 + 0,2x_2) \geq 0; \quad x_2 - (0,22x_1 + 0,15x_2) \geq 0;$$

що дає

$$0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0; \quad -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0.$$

4 Невід'ємний випуск продукції: $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.

Формалізована задача має вигляд:

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} -0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \\ 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0, \\ -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0, \end{cases} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

12.2.4 Розв'язання задачі за допомогою пакета Maple

> **restart:**

> **with(simplex):**

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

> **F:=5.66*x1+4.35*x2;**

$$F := 5.66 x1 + 4.35 x2$$

> **g1:= -0.22*x1+0.85*x2<=50; g2:=x1<=350; g3:=x2<=280;**

g4:=0.9*x1-0.2*x2>=0; g5:= -0.22*x1+0.85*x2>=0;

$$g1 := -.22 x1 + .85 x2 \leq 50$$

$$g2 := x1 \leq 350$$

$$g3 := x2 \leq 280$$

$$g4 := 0 \leq .9 x1 - .2 x2$$

$$g5 := 0 \leq -.22 x1 + .85 x2$$

> **maximize(F,{g1,g2,g3,g4,g5},NONNEGATIVE);**

{x2 = 149.4117647, x1 = 350.0000000 }

> **x1:=350:x2:=149.41:F;{g1,g2,g3,g4,g5};**

2630.9335

{ 49.9985 ≤ 50, 350 ≤ 350, 149.41 ≤ 280, 0 ≤ 49.9985, 0 ≤ 285.118 }

12.3 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 5

Таблиця 15 – Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 5

Варіант 1	Варіант 2
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.03 & 0.50 \\ 0.04 & 0.05 & 0.30 \\ 0.3 & 0.00 & 0.05 \end{pmatrix}$	$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.09 \\ 0.24 & 0.15 & 0.03 \\ 0.3 & 0.01 & 0.05 \end{pmatrix}$
грошових одиниць.	товарних одиниць.
$k1 : k2 = 1 : 2; k3 \leq 100;$	$k1 : k2 : k3 = 1 : 4 : 3;$
$R = (300, 200, 400), C = (3, 2, 4),$	$R = (320, 400, 200),$
$F = (200, 400, 350)$	$C = (5, 3, 2).$

Варіант 3 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.050.120.50 \\ 0.320.010.15 \\ 0.200.050.00 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 1 : 3; k_3 \geq 10;$ $R = (400, 200, 300), C = (2, 3, 5),$ $F = (250, 340, 250)$	Варіант 4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.000.320.11 \\ 0.400.010.25 \\ 0.250.180.04 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 1 : 3;$ $R = (350, 230, 300),$ $C = (1, 4, 6).$
Варіант 5 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.030.200.51 \\ 0.230.100.00 \\ 0.140.500.30 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 3 : 2; k_3 \leq 50;$ $R = (420, 200, 300), C = (2, 1, 3),$ $F = (400, 200, 550).$	Варіант 6 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.210.070.12 \\ 0.060.030.15 \\ 0.200.140.03 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 1 : 2;$ $R = (240, 420, 230),$ $C = (2, 4, 3).$
Варіант 7 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.150.230.60 \\ 0.300.000.08 \\ 0.400.050.11 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 2 : 3; k_3 \geq 15;$ $R = (300, 250, 420),$ $C = (3, 2, 5), F = (320, 320, 250).$	Варіант 8 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.00 \\ 0.400.310.25 \\ 0.050.280.04 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : 3;$ $R = (400, 340, 300),$ $C = (4, 3, 6).$
Варіант 9 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.350.09 \\ 0.000.210.15 \\ 0.240.100.23 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 3 : 1; k_3 \leq 80;$ $R = (500, 300, 400), C = (5, 3, 4),$ $F = (300, 450, 350).$	Варіант 10 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.10 \\ 0.400.000.05 \\ 0.070.140.24 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 3 : 4 : 1;$ $R = (400, 350, 280),$ $C = (4, 2, 3).$

Варіант 11 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.50 \\ 0.300.000.05 \\ 0.040.050.30 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 1 : 2; k_3 \leq 100;$ $R = (300, 200, 400), C = (3, 2, 4),$ $F = (200, 400, 350).$	Варіант 12 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.210.070.12 \\ 0.060.030.15 \\ 0.200.140.03 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 1 : 2;$ $R = (240, 420, 230),$ $C = (2, 4, 3).$
Варіант 13 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.00 \\ 0.400.310.25 \\ 0.050.280.04 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 1 : 3; k_3 \geq 10;$ $R = (400, 200, 300), C = (2, 3, 5)$ $F = (250, 340, 250).$	Варіант 14 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.050.120.50 \\ 0.320.010.15 \\ 0.200.050.00 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : 3;$ $R = (400, 340, 300),$ $C = (4, 3, 6).$
Варіант 15 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.350.09 \\ 0.000.210.15 \\ 0.240.100.23 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 3 : 2; k_3 \leq 50;$ $R = (420, 200, 300), C = (2, 1, 3),$ $F = (400, 200, 550).$	Варіант 16 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.030.200.51 \\ 0.230.100.00 \\ 0.140.500.30 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 3 : 4 : 1;$ $R = (400, 350, 280),$ $C = (4, 2, 3).$
Варіант 17 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.09 \\ 0.300.010.05 \\ 0.240.150.03 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 2 : 3; k_3 \geq 15;$ $R = (300, 250, 420), C = (3, 2, 5),$ $F = (320, 320, 250).$	Варіант 18 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.150.230.60 \\ 0.300.000.08 \\ 0.400.050.11 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 4 : 3;$ $R = (320, 400, 200),$ $C = (5, 3, 2).$

Варіант 19 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.000.320.11 \\ 0.400.010.25 \\ 0.250.180.04 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 = 3 : 1; k_3 \leq 80;$ $R = (500, 300, 400), C = (5, 3, 4),$ $F = 300, 450, 350).$	Варіант 20 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.10 \\ 0.400.000.05 \\ 0.070.140.24 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 1 : 3;$ $R = (350, 230, 300),$ $C = (1, 4, 6).$
Варіант 21 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.150.230.60 \\ 0.300.000.08 \\ 0.400.050.11 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 4 : 3;$ $R = (320, 400, 200), C = (5, 3, 2),$ $F = (320, 320, 250).$	Варіант 22 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.09 \\ 0.300.010.05 \\ 0.240.150.03 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 = 2 : 3; k_3 \geq 15;$ $R = (300, 250, 420),$ $C = (3, 2, 5).$
Варіант 23 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.350.09 \\ 0.000.210.15 \\ 0.240.100.23 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 1 : 3;$ $R = (350, 230, 300), C = (1, 4, 6),$ $F = (300, 450, 350).$	Варіант 24 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.000.320.11 \\ 0.400.010.25 \\ 0.250.180.04 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 = 3 : 1; k_3 \leq 80;$ $R = (500, 300, 400),$ $C = (5, 3, 4).$
Варіант 25 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.50 \\ 0.300.000.05 \\ 0.040.050.30 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 2 : 1 : 2;$ $R = (240, 420, 230), C = (2, 4, 3),$ $F = (200, 400, 350).$	Варіант 26 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.210.070.12 \\ 0.060.030.15 \\ 0.200.140.03 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 = 1 : 2; k_3 \leq 100;$ $R = (300, 200, 400),$ $C = (3, 2, 4).$

Варіант 27 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.050.120.50 \\ 0.320.010.15 \\ 0.200.050.00 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 1 : 1 : 3$; $R = (400, 340, 300)$, $C = (4, 3, 6)$, $F = (250, 340, 250)$.	Варіант 28 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.100.300.00 \\ 0.400.310.25 \\ 0.050.280.04 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 = 1 : 3$; $k_3 \geq 10$; $R = (400, 200, 300)$, $C = (2, 3, 5)$.
Варіант 29 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.030.200.51 \\ 0.230.100.00 \\ 0.140.500.30 \end{pmatrix}$ грошових одиниць. $k_1 : k_2 : k_3 = 3 : 4 : 1$; $R = (400, 350, 280)$, $C = 4, 2, 3$, $F = (400, 200, 550)$.	Варіант 30 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.200.030.10 \\ 0.400.000.05 \\ 0.070.140.24 \end{pmatrix}$ товарних одиниць. $k_1 : k_2 = 3 : 2$; $k_3 \leq 50$; $R = (420, 200, 300)$, $C = (2, 1, 3)$.

13 ЗАДАЧА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

13.1 Теоретичні відомості

Задача математичного програмування, у якій цільова функція і/або обмеження нелінійні, називається нелінійною.

Ці задачі складають великий клас настільки складних задач, що для них досі немає універсальних методів точного розв'язання. Але є методи для окремих спеціальних класів.

Одним із таких класів є задача, у якій цільова функція має квадратичну складову, а обмеження – лінійні функції. Така задача відноситься до квадратичного програмування.

У якості основної розглядають задачу мінімізації:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j \quad (\min);$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m;$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Якщо в задачі квадратичного програмування цільова функція максимізується або в системі обмежень є знак $\geq$, то їх завжди можна звести до вищенаведеної форми.

У випадку нелінійного програмування методи розв'язання задачі відмінні від методів розв'язання задач лінійного програмування.

Нагадаємо, що значення функції $f(A)$ називається максимумом (мінімумом) функції $f(X)$, якщо воно є найбільшим (найменшим) у деякому наближенні точки A . Відповідне значення аргументу A називається точкою максимуму (мінімуму). Максимуми та мінімуми функції називаються екстремумами функції, а точки максимуму й мінімуму – точками екстремуму.

Однак екстремум не завжди є найбільшим (найменшим) значенням функції в деякій області, а в задачі математичного програмування треба знайти саме найбільше (найменше) значення цільової функції в області розв'язків системи обмежень.

На відміну від задачі ЛП, у якій оптимальне розв'язання завжди знаходять на границі області розв'язків задачі, цільова функція задачі нелінійного програмування може мати екстремум як на границі, так і усередині багатокутника розв'язків.

Розглянемо алгоритм знаходження найбільшого значення функції в деякій області СОБ (найменше значення знаходиться аналогічно).

1 Знаходимо безумовний екстремум функції F . Перевіряємо, чи знаходиться точка екстремуму в СОБ. Якщо «так» – запам'ятовуємо її координати та значення функції в цій точці.

2 Знаходимо умовний екстремум функції F на кожній границі області відповідно. Перевіряємо, чи знаходиться точка екстремуму в СОБ. Якщо «так» – запам'ятовуємо її координати та значення функції в цій точці.

3 Знаходимо значення функції в усіх кутових точках області.

4 Порівняємо всі знайдені значення функції. Обираємо найбільше значення. Відповідна точка й буде точкою максимуму в заданій області обмежень.

Приклад. Розглянемо задачу, в якій цільова функція нелінійна, а система обмежень задана лінійними функціями.

$$U = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 3x_2 \text{ (max);}$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \geq 13 \\ 3x_1 + x_2 \leq 39 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Побудуємо графік розв'язків системи обмежень (рис. 15).

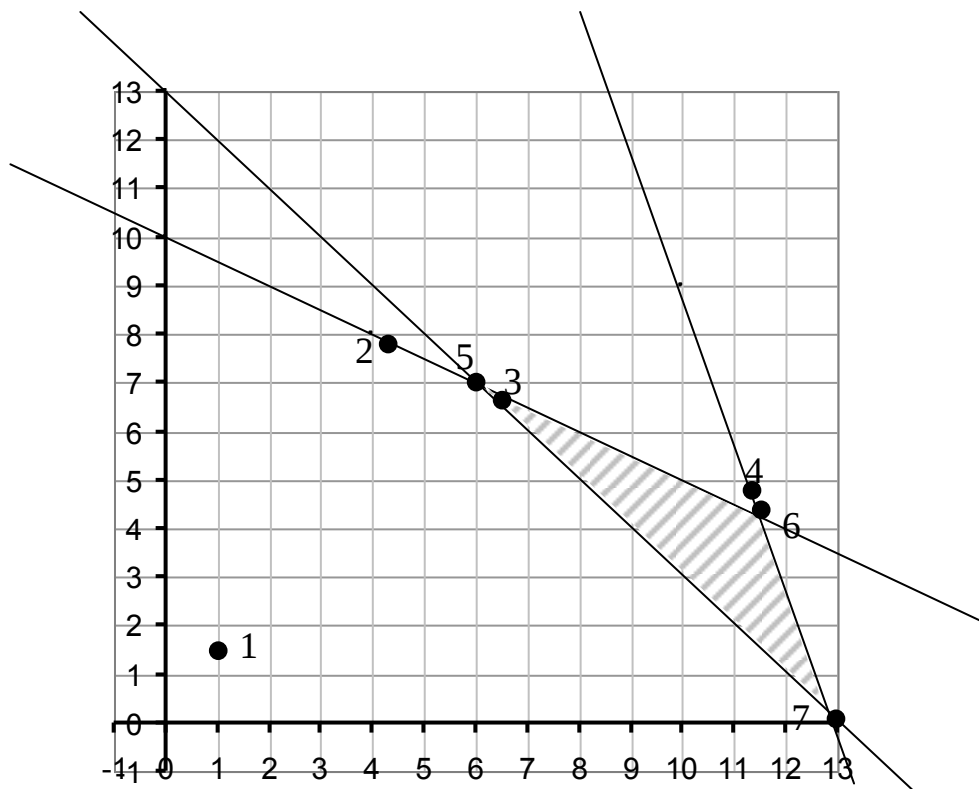


Рисунок 15

Знаходимо по черзі:

1 Безумовний екстремум – не потрапляє в область.

2 Умовний екстремум, якщо $x_1 + 2x_2 = 20$:

$$x_1 = 4.2, x_2 = 7.9 \quad U(4.2; 7.9) = 47.95 \text{ – не потрапляє в область.}$$

3 Умовний екстремум, якщо $x_1 + x_2 = 13$:

$$x_1 = 6.25, x_2 = 6.75 \quad U(6.25; 6.75) = 51.875 \text{ – потрапляє в область.}$$

4 Умовний екстремум, якщо при $3x_1 + x_2 = 39$:

$$x_1 = 11.35, x_2 = 4.95 \quad U(11.35; 4.95) = 115.775 \text{ – не потрапляє в область.}$$

5 Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 20 \\ x_1 + x_2 = 13 \end{cases},$$
$$x_1 = 6, x_2 = 7 \quad U(6; 7) = 52.$$

6 Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 20 \\ 3x_1 + x_2 = 39 \end{cases},$$
$$x_1 = 11.6, x_2 = 4.2 \quad U(11.6; 4.2) = 116.4.$$

7 Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13 \\ 3x_1 + x_2 = 39 \end{cases},$$
$$x_1 = 13, x_2 = 0 \quad U(13; 0) = 143.$$

Випишуємо точки, які потрапляють в область:

$$x_1 = 6.25, x_2 = 6.75 \quad U(6.25; 6.75) = 51.875;$$

$$x_1 = 6, x_2 = 7 \quad U(6; 7) = 52;$$

$$x_1 = 11.6, x_2 = 4.2 \quad U(11.6; 4.2) = 116.4.$$

$$x_1 = 13, x_2 = 0 \quad U(13; 0) = 143.$$

Як бачимо, найбільшим значенням функції U при умові виконання системи обмежень, буде $x_1 = 13, x_2 = 0$ $U(13; 0) = 143$.

При вивченні вищої математики розглядались методи пошуку екстремумів функцій багатьох змінних. Але ми будемо розв'язувати задачу нелінійного програмування за допомогою пакета **Maple** (додаток А).

13.2 Приклад розв'язання задачі нелінійного програмування в пакеті Maple

Знайти максимальне значення функції F на області, заданій системою обмежень.

$$\begin{cases} F = 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 & (\max), \\ x_1 + 4x_2 \leq 52, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо задачу за допомогою пакета MAPLE.

> **restart:**

> **readlib (extrema):**

> **F:=9*x1+2*x2-x1*x1-x2*x2;**

$$F := 9 x_1 + 2 x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

> **q1:=x1+4*x2; b1:=52;**

$$q1 := x_1 + 4 x_2$$

$$b1 := 52$$

> **q2:=x1-x2; b2:=2;**

$$q2 := x_1 - x_2$$

$$b2 := 2$$

> **q3:=7*x1+3*x2; b3:=64;**

$$q3 := 7 x_1 + 3 x_2$$

$$b3 := 64$$

> **sog:={q1<=b1, q2<=b2, q3>=b3};**

$$sog := \{ x_1 + 4 x_2 \leq 52, x_1 - x_2 \leq 2, 64 \leq 7 x_1 + 3 x_2 \}$$

> **inequal(sog, x1=0..18, x2=0..14, optionsexcluded=(color=white));**

Результат виконання команди – на рис. 16.

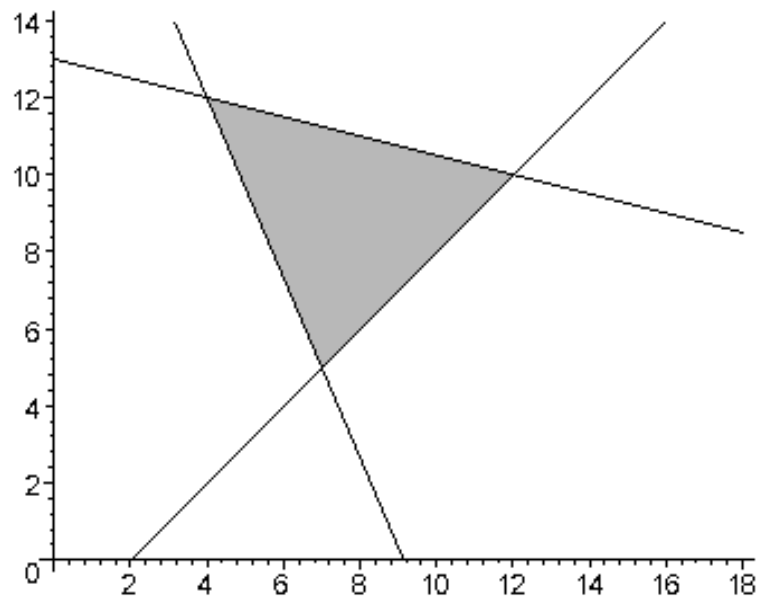


Рисунок 16

Команда пошуку безумовного екстремуму:

```
> extrema(F, {}, {x1, x2}, 's'); s;
```

$$\left\{ \frac{85}{4} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x1 = \frac{9}{2}, x2 = 1 \right\} \right\}$$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язання:

```
> x1:=9./2; x2:=1.; Fex:=evalf(F,4); x1:=9/2:x2:=1:q1<=b1; q2<=b2;
q3>=b3; x1:='x1':x2:='x2':
```

$$x1 := 4.500000000$$

$$x2 := 1.$$

$$Fex := 21.25$$

$$8.500000000 \leq 52$$

$$3.500000000 \leq 2$$

$$64 \leq 34.50000000$$

Команда пошуку екстремуму на границі, заданій 1-м обмеженням:

```
> extrema(F, {q1=b1}, {x1, x2}, 's'); s;
```

$$\left\{ \frac{-1531}{17} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x_2 = \frac{191}{17}, x_1 = \frac{120}{17} \right\} \right\}$$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язку:

**> x1:=120./17; x2:=191./17; Fex:=evalf(F,4); q1<=b1; q2<=b2;
q3>=b3; x1:='x1':x2:='x2':**

$$x_1 := 7.058823529$$

$$x_2 := 11.23529412$$

$$F_{ex} := -90.12$$

$$52.00000001 \leq 52$$

$$-4.176470591 \leq 2$$

$$64 \leq 83.11764706$$

Команда пошуку екстремуму на границі, заданій 2-м обмеженням:

> extrema(F,{q2=b2},{x1,x2},'s');s;

$$\left\{ \frac{161}{8} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x_2 = \frac{7}{4}, x_1 = \frac{15}{4} \right\} \right\}$$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язку:

**> x1:=15./4; x2:=7./4; Fex:=evalf(F,4); q1<=b1; q2<=b2; q3>=b3;
x1:='x1':x2:='x2':**

$$x_1 := 3.750000000$$

$$x_2 := 1.750000000$$

$$F_{ex} := 20.13$$

$$10.75000000 \leq 52$$

$$2.000000000 \leq 2$$

$$64 \leq 31.50000000$$

Команда пошуку екстремуму на границі, заданій 3-м обмеженням:

> extrema(F,{q3=b3}, {x1,x2},'s');s;

$$\left\{ \frac{1449}{232} \right\}$$

$$\left\{ \left\{ x_2 = \frac{293}{116}, x_1 = \frac{935}{116} \right\} \right\}$$

Команда перевірки системи обмежень для знайденого розв'язку:

```
> x1:=935./116; x2:=293./116; Fex:=evalf(F,4); q1<=b1; q2<=b2;  
q3>=b3; x1:='x1':x2:='x2':
```

$x1 := 8.060344828$

$x2 := 2.525862069$

$F_{ex} := 6.249$

$18.16379311 \leq 52$

$5.534482759 \leq 2$

$64 \leq 64.00000001$

Команда пошуку розв'язку системи з 1-го і 2-го рівнянь:

```
> solve({q1=b1, q2=b2});
```

$\{ x2 = 10, x1 = 12 \}$

```
> x1:=12:x2:=10:F_ex_1_2:=evalf(F,4);
```

$F_{ex_1_2} := -116.$

Команда пошуку розв'язку системи з 3-го і 2-го рівнянь:

```
> solve({q3=b3, q2=b2});
```

$\{ x2 = 5, x1 = 7 \}$

```
> x1:=7:x2:=5:F_ex_2_3:=evalf(F,4); x1:='x1':x2:='x2':
```

$F_{ex_2_3} := -1.$

Команда пошуку розв'язку системи з 3-го і 1-го рівнянь:

```
> solve({q3=b3, q1=b1});
```

$\{ x2 = 12, x1 = 4 \}$

```
> x1:=4:x2:=12:F_ex_2_3:=evalf(F,4); x1:='x1':x2:='x2':
```

$F_{ex_2_3} := -100.$

Для зручності аналізу отриманих розв'язків зведемо їх в таблицю 16.

Розв'язки знаходять серед тих, для яких виконується система обмежень. Це розв'язки 2, 5, 6, 7. Найбільшого значення $F = -1$ цільова функція набуває в точці $x_1 = 7$, $x_2 = 5$.

Таблиця 16

№ п/п	Тип екстремуму	План	Цільова функція	Система обмежень
1	Безумовний	$x_1 := \frac{9}{2}, x_2 := 1$	$F_{ex} := 21.25$	Не виконується
2	На границі, заданій 1-м обмеженням	$x_1 := \frac{120}{17},$ $x_2 := \frac{191}{17}$	$F_{ex} := -90.06$	Виконується
3	На границі, заданій 2-м обмеженням	$x_1 := \frac{15}{4}, x_2 := \frac{7}{4}$	$F_{ex} := 20.12$	Не виконується
4	На границі, заданій 3-м обмеженням	$x_1 := \frac{935}{116},$ $x_2 := \frac{293}{116}$	$F_{ex} := 6.246$	Не виконується
5	Точка перетину прямих 1 і 2	$\{x_2 = 10, x_1 = 12\}$	$F_{ex_1_2} := -116.$	Виконується
6	Точка перетину прямих 3 і 2	$\{x_2 = 5, x_1 = 7\}$	$F_{ex_2_3} := -1.$	Виконується
7	Точка перетину прямих 1 і 3	$\{x_2 = 12, x_1 = 4\}$	$F_{ex_2_3} := -100.$	Виконується

Висновок

Координати оптимальної точки (точки максимуму): $x_1 = 7, x_2 = 5$.
 При цьому цільова функція набуває найбільшого значення $F = -1$.

14 ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема. Задача квадратичного програмування.

Мета: *набути вміння пошуку розв'язку задачі квадратичного програмування.*

Робота розрахована на 4 години.

14.1 Завдання до лабораторної роботи 6

Розв'язати формалізовану задачу квадратичного програмування.
Зробити висновок.

Звіт про лабораторну роботу

- 1 Умова задачі.
- 2 Графік області обмежень.
- 3 Роздруківка розв'язання задачі.
- 4 Накреслити на графіку області обмежень усі знайдені точки.
- 5 Аналіз результату.

14.2 Індивідуальні завдання до лабораторної роботи 6

Таблиця 17

Варіант 1 $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	Варіант 2 $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ 2x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 3 $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	Варіант 4 $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 5 $\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	Варіант 6 $\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Варіант 7	Варіант 8
$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 9	Варіант 10
$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 11	Варіант 12
$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 13	Варіант 14
$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 15	Варіант 16
$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 17	Варіант 18
$\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 19	Варіант 20
$\begin{cases} F = -4x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Продовження таблиці 17

Варіант 21	Варіант 22
$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 23	Варіант 24
$\begin{cases} F = -x_1 + 6x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1x_2 & (\max), \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 25	Варіант 26
$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 6x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 + 2x_1x_2 & (\max), \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 27	Варіант 28
$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -4, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Варіант 29	Варіант 30
$\begin{cases} F = 8x_1 + 12x_2 - x_1^2 - 1.5x_2^2 & (\max), \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 0, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$\begin{cases} F = 3x_1 - 2x_2 - 0.5x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 & (\max), \\ -2x_1 - x_2 \leq -2, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

15 САМОСТІЙНА РОБОТА

Тема. Визначення типу задачі лінійного програмування. Розв'язання прямої (при необхідності – двоїстої) задачі. Інтерпретація результатів розрахунків.

Мета: *набути вмінь правильного визначення типу неформалізованої задачі, запису її математичної моделі.*

15.1 Завдання до самостійної роботи

Вимоги до виконання завдання 1

Розв'язати задачу лінійного програмування.

Звіт

- 1 Умова задачі.
- 2 Формалізація задачі.
- 3 Графічне розв'язання задачі (для завдання 1).
- 4 Запис задачі в матричній формі (якщо можливо).
- 5 Роздруківка розв'язання задачі.
- 6 Формалізація двоїстої задачі.
- 7 Роздруківка розв'язання двоїстої задачі.
- 8 Економічний аналіз результату.

15.2 Індивідуальні завдання до самостійної роботи

Варіант 1

Завдання 1

З пункту А до пункт В щодня відправляються пасажирські і швидкі потяги. У таблиці 18 зазначений наявний парк вагонів різних типів, із яких щодня можна формувати дані потяги, і кількість пасажирів, що вміщаються в кожний із вагонів.

Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських потягів, при яких кількість перевезених пасажирів буде максимальною.

Таблиця 18

Потяги	Вагони				
	Багажний	Поштовий	Плацкарт	Купейний	М'який
Швидкий	1	1	5	6	3
Пасажирський	1	—	7	2	1
Кількість пасажирів у вагоні	—	—	58	40	32
Парк вагонів	14	8	91	72	33

Завдання 2

До складу раціону годівлі входять три продукти: сіно, силос і концентрати, що містять живильні речовини: білок, кальцій і вітаміни. Вміст живильних речовин у грамах на 1 кг відповідного продукту харчування і мінімально необхідна норма їхнього споживання задані таблицею 19.

Визначити оптимальний раціон годівлі з умови мінімальної вартості, якщо ціна 1 кг продукту харчування складає: силос – 2, концентрати – 5, сіно – 3 гр. од.

Включити в задачу умову: відношення сіно/концентрати = 5/1.

Таблиця 19

Продукти	Живильні речовини		
	Білок	Кальцій	Вітаміни
Силос	20	4	1
Концентрати	180	3	1
Сіно	10	6	2
Норма споживання	2000	120	40

Завдання 3

Колгосп може посіяти жито, пшеницю і ячмінь на чотирьох ділянках, площі яких дорівнюють відповідно 500, 400, 600 і 500 га. Є в наявності насіння жита, пшениці і ячменя для посіву на площі 250, 1400 і 350 га відповідно. Врожайність кожної культури на кожній із ділянок і ціни зазначені в таблиці 20.

Скласти план посіву зернових культур (із урахуванням родючості ділянок), що максимізує прибуток.

Таблиця 20

Зернова культура	Врожайність на відповідній ділянці				Ціни
	I	II	III	IV	
Жито	22	25	20	18	7
Пшениця	30	32	25	28	6.5
Ячмінь	31	28	25	23	4.3

Варіант 2

Завдання 1

Завод виробляє два вироби на експорт за допомогою машин M_1 і M_2 . Максимальний час роботи машини M_1 – 10,6 год., машини M_2 – 14,2 год. у добу. Витрата часу роботи машин на один виріб подана у таблиці 21.

Таблиця 21

Виріб	Машини, год.	
	M ₁	M ₂
А	1.3	2.5
В	1.8	2.1

Валютний прибуток від продажу одиниці виробу А складає 4 долари, а виробу В – 3 долари. Розрахувати виробничий план на добу при максимумі прибутку, якщо виробів В треба випустити не менше 2.

Завдання 2

Тригалузева балансова модель у вартісному вираженні характеризується матрицею коефіцієнтів прямих затрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Визначити оптимальний випуск продукції, що забезпечує максимальний прибуток, якщо розміри капіталовкладень у відповідну галузь обмежені 100, 50, 60 гр. од., а вартості одиниці кінцевого продукту дорівнюють відповідно 1, 5, 4 гр. од. Крім цього, випуск продукції обмежений числами 100, 200, 150 одиниць, та кінцевий продукт першої галузі повинен складати не менше 10 одиниць.

Завдання 3

Три бази, у яких збираються надлишки картоплі в даному регіоні, постачають її в чотири міста. Добова потреба міст у картоплі складає відповідно 120, 80, 240 і 160 т. Бази можуть доставити 200, 270 і 130 т картоплі відповідно. Витрати на перевезення 1 т картоплі до кожного з міст задаються матрицею:

$$Z = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 12 \\ 11 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розрахувати план перевезень, при якому зводяться до мінімуму транспортні витрати.

Варіант 3

Завдання 1

На кондитерській фабриці виробляється два види карамелі K1 і K2. Для виробництва карамелі потрібні цукор, патока та повидло. Запаси сировини, витрати сировини на виробництво карамелі та прибуток, отриманий від продажу 1 т карамелі, наведено в таблиці 22.

Таблиця 22

Сировина	Витрати сировини		Запаси
	K1	K2	
Цукор	0,7	0,5	700
Патока	0,3	0,2	300
Повидло	0,1	0,3	150
Прибуток, гр. од.	10	11,2	

Скласти план виробництва карамелі, що дає максимальний прибуток, якщо виробництво карамелі K1 має бути не меншим ніж 150 т.

Завдання 2

До порту кораблі привезли 6000 т чавуну, 4000 т залізної руди і 3000 т апатитів. Розвантаження кораблів може бути здійснено двома способами:

- а) безпосередньо у вагони;
- б) на склади.

Першим способом треба розвантажити 8000 т, залишок (5000 т) прийде́ться направити на склад. Вартість розвантаження 1 т товару безпосередньо у вагони складає відповідно 4,30; 5,25 і 2,20 гр. од., а при відправленні на склад – 7,8; 6,40 і 3,25 гр. од. Як спланувати розвантаження з мінімальними витратами?

Завдання 3

Підприємство має три складові частини A_1 , A_2 , A_3 , що можуть постачатися з чотирьох сировинних точок C_1 , C_2 , C_3 , C_4 . Транспортні витрати на одиницю сировини дані в матриці B . Виробничі потужності баз в одиницю часу складають 100, 160, 140 і 120 одиниць сировини. Виробничі потужності складових частин підприємства в одиницю часу складають 150, 250 і 120 одиниць сировини.

$$B = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Прибуток від переробки кожної одиниці без урахування транспортних витрат складає 30 гр. од. на кожну вагову одиницю сировини, що переробляється. Розрахувати план постачання, що забезпечує максимальний прибуток підприємства.

Варіант 4

Завдання 1

Хлібопекарський цех випікає два види хліба – А і В. На виробництво 1 т хліба А потрібно 700 кг борошна; хліба В – 820 кг. Витрати робочого часу основного устаткування цеху на 1 т хліба А і В відповідно 1,2 і 2,2 год. Цех має запас борошна у кількості 14 340 кг. Резерв робочого часу устаткування – 36,1 год. Прибуток від реалізації однієї тонни хліба А – 22 гр. од., хліба В – 30 гр. од. Спланувати роботу цеху так, щоб прибуток був максимальним, якщо випуск хліба В має бути не меншим ніж 12 тонн.

Завдання 2

З трьох видів сировини необхідно скласти суміш, до складу якої повинні входити не менше ніж 26 одиниць хімічної речовини А, 30 одиниць речовини В и 27 одиниць речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, що є в 1 кг сировини кожного виду, зазначено в таблиці 23. У ній же наведено ціну 1 кг сировини кожного виду. Скласти суміш потрібного складу, що має мінімальну вартість.

Таблиця 23

Речовина	Кількість одиниць речовини в 1 кг сировини		
	Сировина 1	Сировина 2	Сировина 3
А	1	1	–
В	2	–	3
С	1	2	4
Ціна	5	6	7

Завдання 3

Для обігріву приміщень використовують чотири агрегати, кожний із яких може працювати на будь-якому з трьох сортів палива, наявного в кількостях 70, 80 і 150 т. Потреба в паливі кожного з агрегатів дорівнює відповідно 80, 120, 40 і 60 т. Теплотворна спроможність i -го сорту палива при використанні його на j -му агрегаті задається матрицею

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 11 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 11 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Знайти такий розподіл палива між агрегатами, при якому утворюється максимальна кількість тепла від використання всього палива.

Варіант 5

Завдання 1

Корабель привіз 6000 т чавуну і 4000 т залізної руди. Розвантаження може бути здійснено двома способами:

- а) безпосередньо у вагони;
- б) на склади.

Першим способом треба розвантажити 7000 т, залишок вантажу прийдеться направити на склад. Вартість розвантаження 1 т товару безпосередньо у вагони складає відповідно 4,3 і 3,6 гр. од., а при відправленні на склади – 3,6 і 5,1 гр. од. відповідно. Спланувати розвантаження з мінімальними витратами, якщо у вагони треба розвантажити не менше ніж 2000 т чавуну.

Завдання 2

Механічний завод при виготовленні трьох різних типів деталей використовує токарські, фрезерні і стругальні верстати. При цьому опрацювання кожної деталі можна вести трьома засобами. У таблиці 24 зазначені ресурси (у верстато-годинах) кожної групи верстатів, норми витрати часу при опрацюванні деталі на відповідному верстаті за даним технологічним способом і прибуток від випуску одиниці деталі кожного виду.

Таблиця 24

Верстати	Деталі								Ресурси часу
	1		2			3			
	Технічни засоби								
	1	2	1	2	3	1	2	3	
Токарний	0,4	0,9	0,5	0,3	–	0,7	–	0,9	250
Фрезерний	0,5	–	0,6	0,2	0,5	0,3	1,4	–	450
Стругальний	0,3	0,5	0,4	1,5	0,3	–	1,0	0,5	600
Прибуток	12		18			30			–

Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей, що забезпечує максимальний прибуток. Розв'язати задачу, якщо деталі 2-го і 3-го типів повинні випускатися в комплекті 2/3.

Завдання 3

Цегла, виготовлена на чотирьох цегельних заводах, надходить на три об'єкти. У таблиці 25 зазначені виробництво цегли на кожному заводі й потреби в цеглі на об'єктах у тисячах одиниць, ціна перевезення 1 тисячі одиниць цегли від кожного заводу до кожного об'єкта.

Таблиця 25

Завод	Вартість перевезень			Виробництво
	1	2	3	
I	8	7	5	240
II	13	8	10	360
III	12	4	11	180
IV	14	6	12	120
Потреба	230	320	350	—

Скласти план доставок цегли з мінімальною вартістю перевезень.

Варіант 6

Завдання 1

На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовуються три види кормів. Кількість одиниць корму, що витрачається на одну тварину, запаси кормів і ціна 1 шкурки зазначені в таблиці 26.

Таблиця 26

Вид корму	Кількість од. на 1 тварину		Загальна кількість корму
	Лисиця	Песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Вартість	16	12	—

Визначити, скільки лисиць і песців необхідно вирощувати, щоб одержати максимальну ціну від продажу їхніх шкурок.

Завдання 2

З чотирьох видів основних матеріалів (мідь, цинк, свинець, нікель) складають три види сплавів латуні: звичайний, спеціальний і для художніх виробів. Ціни одиниці ваги міді, цинку, свинцю і нікелю складають 0,8; 0,6; 0,4; 1 гр. од., а одиниці ваги сплавів 2; 3; 5 гр. од. відповідно.

Сплав для художніх виробів повинний містити 6% нікелю, 50% міді і 30% свинцю; спеціальний – 10% нікелю, 60% міді, 10% цинку і 20% свинцю. У звичайний сплав компоненти можуть входити порівну.

Виробнича потужність підприємства дозволяє випускати не більше ніж 400 од. ваги звичайного сплаву, не більше ніж 700 од. ваги спеціального сплаву і не більше ніж 100 од. ваги сплаву для художніх виробів.

Скласти виробничий план, що забезпечує максимальний прибуток.

Завдання 3

На трьох складах оптової бази зосереджений однорідний вантаж у кількостях 180, 60 і 80 одиниць. Цей вантаж необхідно перевезти в чотири магазини. Кожний із магазинів повинний одержати відповідно 120, 40, 60 і 80 одиниць вантажу. Тарифи перевезень одиниці вантажу з кожного складу в усі магазини задаються матрицею

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 7 **Завдання 1**

Підприємство випускає продукцію двох видів – P_1 і P_2 , використовуючи при цьому три види сировини – C_1 , C_2 , C_3 , запаси якої обмежені. Витрата сировини кожного виду при виробництві одиниці продукції P_1 і P_2 задається таблицею 27; у ній зазначені прибутки підприємства від продажу одиниці готової продукції кожного виду.

Таблиця 27

Продукція	Сировина			Прибуток від продукції
	C_1	C_2	C_3	
P_1	1	3	4	7
P_2	2	2	6	8
Загальні запаси	10	18	36	–

Скласти план випуску продукції кожного виду так, щоб прибуток підприємства був максимальним.

Завдання 2

Для підтримки нормальної життєдіяльності людині щодня необхідно споживати не менше ніж 118 г білків, 56 г жирів, 500 г вуглеводів, 8 г мінеральних солей. Кількість живильних речовин (у грамах) в 1 кг продуктів і ціна 1 кг продуктів зазначені в таблиці 28.

Скласти денний раціон, що містить не менше мінімальної добової норми потреби людини в необхідних живильних речовинах при мінімальній вартості споживаних продуктів.

Таблиця 28

Живильні речовини	Обсяг живильних речовин						
	М'ясо	Риба	Молоко	Олія	Сир	Крупа	Картопля
Білки	180	190	30	10	260	130	21
Жири	20	3	40	85	310	30	2
Вуглеводи	—	—	50	6	20	650	200
Мін. солі	9	10	7	12	60	20	10
Ціна	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Завдання 3

Виробниче об'єднання має у своєму складі три філії, що виробляють однорідну продукцію в кількостях, що дорівнюють 50, 30 і 10 одиниць відповідно. Цю продукцію одержують чотири споживачі, розташовані в різних місцях. Їхні потреби дорівнюють відповідно 30, 30, 20 і 10 одиниць. Тарифи перевезень одиниці продукції від кожної з філій кожному споживачу задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти план прикріплення одержувачів продукції до її постачальників, при якому вартість перевезень є мінімальною.

Варіант 8**Завдання 1**

У двогалузевій моделі задані розміри фонду накопичення 60 і 50 гр. од. і матриця коефіцієнтів повних капітальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.25 & 0.8 \end{pmatrix},$$

де a_{ik} являє собою розмір капіталовкладень із фонду накопичення i -ої галузі для збільшення на 1 од. випуску кінцевої продукції k -ої галузі.

Визначити оптимальний план розвитку виробництва з умови одержання максимального сумарного приросту кінцевої продукції при додатковій умові, що приріст кінцевого продукту 1-ї і 2-ї галузей знаходиться у співвідношенні 1/3.

Завдання 2

Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро і книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різноманітних типи дошок, при чому фабрика має в наявності 1500 м дошок 1-го типу і 1000 м дошок 2-го типу; крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 чол. У таблиці 29 наведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення однієї одиниці виробів і прибуток на 1 одиницю виробів.

Таблиця 29

Вироби Ресурси	Витрати на 1 од.			
	Столи	Стільці	Бюро	Книжк. шафи
Дошки 1-го типу, м	5	1	9	12
Дошки 2-го типу, м	2	3	4	1
Трудові ресурси	3	2	5	10
Прибуток, гр. од.	12	5	15	10

Знайти план виробництва, що максимізує прибуток, за умови, що комплектність стільців і шаф дорівнює 6/1.

Завдання 3

Для будівництва трьох доріг використовується гравій із чотирьох кар'єрів. Запаси гравію в кожному із кар'єрів дорівнюють відповідно 120, 280 і 160 умовних одиниць. Потреби в гравії для будівництва кожної з доріг дорівнюють відповідно 130, 220, 60 і 70 умовних одиниць. Тарифи перевезень однієї умовної одиниці гравію з кожного кар'єру до кожної з доріг, що будуються, задаються матрицею

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 9

Завдання 1

До складу раціону годівлі входять два види продуктів – сіно і концентрати, що містять живильні речовини: білок, кальцій, вітаміни. Вміст живильних речовин (у грамах на 1 кілограм) відповідного продукту харчування і мінімально необхідні норми їхнього споживання задані таблицею 30.

Таблиця 30

Продукти	Живильні речовини		
	Білок	Кальцій	Вітаміни
Сіно	65	6	1
Концентрати	200	4	2
Норми споживання	2500	120	42

Визначити оптимальний раціон годівлі з умови мінімальної вартості, якщо ціна 1 кг продукту харчування складає відповідно: сіно – 5 гр. од., концентрати – 7 гр. од.

Включити в задачу умову обмеженості ресурсів на один раціон: сіна – не більше ніж 25 кг, концентратів – не більше ніж 20 кг.

Завдання 2

Продукцією міського молокозаводу є молоко, кефір і сметана, розфасовані в пляшки. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010; 1010; 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливі 1 т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 маш.-год. На розфасуванні сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 годин. Усього для виробництва продукції завод може використовувати 136 000 кг молока. Основне устаткування може використовуватися протягом 21,4 маш.-год., а автомати з розфасування сметани – протягом 16,25 годин. Прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно дорівнює 30, 32 і 136 гр. од. Завод повинний щодня виробляти не менше ніж 100 т молока, розфасованого в пляшки.

Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Завдання 3

Для будівництва трьох об'єктів використовується цегла, виготовлена на чотирьох заводах. Щодня кожний із заводів може виготовити 100, 150 і 50 умовних одиниць цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному з об'єктів дорівнюють відповідно 75, 80, 60 і 85 умовних одиниць. Тарифи перевезень 1 умовної одиниці цегли з кожного із заводів до кожного з об'єктів задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 10

Завдання 1

Виробництво поділяється на дві галузі. Матриця коефіцієнтів матеріальних витрат $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$, де b_{ik} – витрати продукції i -ої галузі на виробництво одиниці продукції k -ої галузі. Ціни на кінцевий продукт галузей $C_1 = 5$ гр. од., $C_2 = 4$ гр. од. Визначити оптимальний валовий випуск кожної галузі у вартісному вираженні, якщо виробничі можливості галузей обмежені розмірами 200 і 300 одиниць продукції, що випускається.

Завдання 2

На ткацькій фабриці для виготовлення трьох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох типів, пряжа і барвники. Норми витрат ресурсів на виготовлення 1 м тканин, ціна 1 м тканин, запаси ресурсів і випуск тканин зазначені в таблиці 31.

Таблиця 31

Ресурси	Норми витрат			Запаси
	1	2	3	
Верстати, верстато-годин				
1-го типу	0,02	-	0,04	200
2-го типу	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа, кг	1,0	1,5	2,0	15000
Барвники, кг	0,03	0,02	0,025	450
Ціна , гр.од.	5	8	9	
Випуск, м				
Мінімальний	1000	2000	2500	
Максимальний	2000	9000	4000	

Скласти такий план випуску тканин, щоб була вироблена можливо більша кількість тканин із максимальною вартістю.

Завдання 3

На трьох комбінатах щодня виробляється 110; 190 і 90 т борошна. Це борошно споживається чотирма хлібозаводами, щоденні потреби яких дорівнюють відповідно 80; 60; 170 і 80 т. Тарифи перевезень 1 т борошна з комбінатів на кожний хлібозавод задаються матрицею

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план доставки борошна, при якому загальна вартість перевезень буде мінімальною.

Варіант 11

Завдання 1

На швейній фабриці для виготовлення двох видів виробів (А і В) використовується тканина двох артикулів та інші витрати. Норми витрати тканин усіх артикулів на пошиття одного виробу, загальний запас тканини і ціна одного виробу наведені в таблиці 32.

Таблиця 32

Ресурси	Норми витрат тканини на один виріб виду, м		Загальний запас тканини, м
	А	В	
Тканина 1	2	1	150
Тканина 2	3	2	210
Інші витрати	7	8	560
Ціна	8	6	-

Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виробити фабрика, щоб ціна виготовленої продукції була максимальною.

Завдання 2

Для виготовлення певного сплаву зі свинцю, цинку й олова використовується сировина у вигляді таких п'ятьох сплавів із тих самих металів, що відрізняються складом і вартістю 1 кг. Ці дані наведені в таблиці 33.

Таблиця 33

Складові	Вміст у сплавах, %				
	I	II	III	IV	V
Свинець	10	10	40	60	30
Цинк	10	30	50	30	20
Олово	80	60	10	10	50
Вартість	4	4,5	5,8	6	7,5

Визначити, скільки потрібно взяти сплаву кожного виду, щоб виготовити з мінімальною собівартістю сплав, що містить 20% свинцю, 30% цинку і 50% олова.

Завдання 3

У трьох сховищах пального щодня зберігається 175; 125 і 140 т бензину. Цей бензин щодня одержують чотири заправні станції в кількостях, що дорівнюють відповідно 180; 110; 60 і 40 т. Вартість перевезень 1 т бензину зі сховищ до заправних станцій задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень бензину, при якому загальна вартість перевезень була б мінімальною.

Варіант 12

Завдання 1

Підприємство може працювати за двома технологічними процесами, причому кількість одиниць продукції, що випускається за різними технологічними процесами за одиницю часу, дорівнює відповідно 300 і 250. Витрати виробничих чинників за технологічними процесами в одиницю часу і ресурси, зазначені в таблиці 34.

Таблиця 34

Чинник	Процес		Ресурси
	1	2	
Сировина	12	10	544
Електроенергія	0,2	0,1	8
Зарплата	3	4	204
Накладні витрати	6	5	300

Скласти план максимального випуску продукції.

Завдання 2

Є тригалузева балансова модель із матрицею коефіцієнтів грошових витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.05 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.15 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виробничі потужності галузей обмежують можливості її валового випуску числами 300, 200, 500. Вектор цін на кінцевий продукт: (2, 5, 1). Визначити оптимальний валовий випуск усіх галузей, що максимізує вартість сумарного кінцевого продукту, якщо на кінцевий продукт накладаються такі обмеження: перший відноситься до третього, як 1/2, другого – не більше ніж 100.

Завдання 3

На трьох складах оптової бази зосереджено борошно в кількостях 140; 360 і 180 т відповідно. Це борошно необхідно перевезти до 5 магазинів, кожний із яких повинний одержати відповідно 90; 120; 230; 180 і 60 т. З першого складу борошно неможливо перевозити до 2-го і 5-го магазинів, а з другого складу до третього магазину має бути завезено 100 т борошна.

Тарифи перевезень 1 т борошна з кожного складу до всіх магазинів задаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 7 & - & 8 & 2 & - \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, вартість яких є мінімальною.

Варіант 13

Завдання 1

Столярна майстерня випускає столи і стільці. При виготовленні цих товарів використовуються два різноманітних типи дошок, причому є в наявності 450 м дошок 1-го типу і 240 м дошок 2-го типу. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 330 люд.-год. У таблиці 35 наведені нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення однієї одиниці виробу і прибуток на одну одиницю виробу.

Таблиця 35

Ресурси	Витрати	
	Столи	Стільці
Дошки 1-го типу, м	5	3
Дошки 2-го типу, м	1	2
Людські ресурси, люд.-год.	3	2
Прибуток	10	6

Максимізувати прибуток за умов, що накладаються на асортимент: столів – не менше ніж 15; стільців – не менше ніж 80.

Завдання 2

На судно вантажопідйомністю 2000 т і ємкістю 3080 м³ потрібно відвантажити три товари А, Б, С. Об'ємні коефіцієнти товару складають відповідно 2,1; 1,2 і 2,3 м³/т. На портовому складі є 900 т товару А і достатньо велика кількість товару С і Б. Товари Б, С мають бути надіслані

в належному співвідношенні, тобто кількість товару С не повинна перевищувати половини кількості товару Б. Доход від перевезення однієї тонни товару складає відповідно 80; 75; 70 гр. од. Яку кількість окремих товарів варто відвантажити на судно, щоб одержати максимальний прибуток від перевезення.

Завдання 3

На трьох залізничних відстоях A_1 , A_2 , A_3 зібралося 120, 110 і 130 незавантажених вагонів. Ці вагони необхідно перегнати на залізничні станції B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 . На кожній із цих станцій потреба у вагонах дорівнює відповідно 80, 60, 70, 100 і 50. З огляду на те, що з відстою A_2 неможливо перегнати вагони на станцію B_2 і B_4 , і знаючи, що тарифи перегонки одного вагона визначаються матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & - & 5 & - & 2 \\ 8 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перегонки вагонів, щоб загальна вартість була мінімальною.

Варіант 14

Завдання 1

На промисловому підприємстві виготовляють два продукти – A_1 і A_2 . Ця продукція виготовляється за допомогою устаткування Y_1 , Y_2 , Y_3 , що протягом дня може працювати відповідно 24 000, 32 000, 27 000 секунд. Норми часу, необхідного для виробництва одиниці продукції за допомогою відповідного устаткування, наведені у таблиці 36.

Таблиця 36

Виріб	Устаткування		
	Y_1	Y_2	Y_3
A_1	3	8	9
A_2	6	4	3

Прибуток від виробництва першого виробу – 23 гр. од., другого – 12 гр. од.

Спланувати виробництво так, щоб одержати максимальний прибуток, якщо виробів A_2 має бути випущено не менше ніж 1000.

Завдання 2

Пароплав може бути використаний для перевезення 11 найменувань вантажу, маса, обсяг і ціна одиниці кожного з яких наведені в таблиці 37.

Таблиця 37

Параметри одиниці вантажу	Номер вантажу										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Маса, т	80	62	92	82	90	60	81	83	86	65	83
Об'єм, м ³	100	90	96	110	120	80	114	60	106	114	86
Ціна	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7	2,8	3,3	3,5	3,7	3,9	4,0

На пароплав може бути завантажено не більше ніж 800 т вантажу, загальним об'ємом, що не перевищує 600 м³. Визначити, скільки одиниць кожного вантажу варто помістити на пароплав так, щоб загальна вартість розміщеного вантажу була максимальною.

Завдання 3

На текстильному підприємстві є три типи ткацьких верстатів. На верстатах кожного з типів можуть вироблятися чотири види тканин: шовк, бязь, ситець і сатин. Продуктивність кожного верстата і собівартість тканин зазначені в таблиці 38.

Таблиця 38

Тип верстата	Продуктивність, м/год.				Собівартість, \$·м/год.			
	Шовк	Бязь	Ситець	Сатин	Шовк	Бязь	Ситець	Сатин
I	24	36	18	42	4	1	3	1
II	12	15	9	21	5	2	4	1
III	8	10	6	14	6	3	5	2

З огляду на те, що фонд робочого часу кожної з груп ткацьких верстатів дорівнює відповідно 90; 220; 180 верстато-годин, скласти такий план їхнього завантаження, при якому загальна собівартість тканин, що випускаються у кількостях 1200 м шовку, 900 м бязі, 1800 м ситцю і 800 м сатину є мінімальною.

Варіант 15

Завдання 1

Для годівлі піддослідної тварини їй необхідно давати щодня не менше ніж 15 од. хімічної речовини A_1 (вітаміну або деякої солі) і 15 од. хімічної речовини A_2 . Не маючи можливості давати речовину A_1 або A_2

у чистому вигляді, можна закупувати речовини B_1 по 1 гр. од. або B_2 по 3 гр. од. за 1 кг, причому кожний кілограм B_1 містить 1 од. A_1 і 3 од. A_2 , а 1 кг B_2 – 6 од. A_1 і 2 од. A_2 .

Запаси речовин на складі: B_1 – 7 кг, B_2 – 9 кг.

Визначити оптимальну закупівлю речовин B_1 і B_2 для щоденного раціону.

Завдання 2

Механічний завод при виготовленні двох типів деталей використовує токарське, фрезерне і зварювальне устаткування. При цьому обробку кожної деталі можна вести за двома різноманітними технологічними засобами. Корисний фонд часу роботи кожної групи устаткування (станко-години), норми витрати часу при обробці кожної деталі на відповідному устаткуванні даним технологічним способом і прибуток від випуску одиниці деталі кожного виду наведені в таблиці 39.

Таблиця 39

Устаткування	Деталі				Фонд часу
	1		2		
	Технологічні способи				
	I	II	I	II	
Фрезерне	2	2	3	0	20
Токарне	3	1	1	2	37
Зварювальне	0	1	1	4	30
Прибуток	11	6	9	7	-

Скласти оптимальний план завантаження устаткування, що забезпечує заводу максимальний прибуток.

Завдання 3

Є три ділянки землі, на яких можуть бути посіяні кукурудза, пшениця, ячмінь і просо. Площа кожної ділянки дорівнює 600, 180 і 220 га відповідно. З урахуванням наявності насіння, кукурудзою, пшеницею, ячменем і просом варто засіяти відповідно 290, 180, 110 і 420 га. Врожайність кожної з культур для кожної ділянки задається матрицею

$$Y = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

Визначити, скільки гектарів кожної культури на кожній ділянці варто посіяти, щоб одержати максимальний збір зерна.

16 ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Наступні задачі сформулювати як задачі лінійного програмування й розв'язати їх.

Варіант 1

Компанія робить полиці для ванних кімнат двох розмірів – А і В. Агенти в справах продажу вважають, що за тиждень на ринку може бути реалізовано до 550 полиць. Для кожної полиці типу А потрібно 2 м^2 матеріалу, а для полиці типу В – 3 м^2 матеріалу. Компанія може одержати до 1200 м^2 матеріалу за тиждень. Для виготовлення однієї полиці типу А потрібно 12 хвилин роботи устаткування, а для виготовлення однієї полиці типу В – 30 хвилин. Устаткування можна використовувати 160 годин на тиждень. Якщо прибуток від продажу полиць А становить 3 грн, а полиць типу В – 4 грн., то скільки полиць треба випустити за тиждень, щоб дістати максимальний прибуток?

Як зміниться виробнича програма, якщо ринок не зможе приймати в тиждень більше ніж 450 полиць? Який у цьому випадку буде максимальний прибуток?

Варіант 2

Виробник елементів центрального опалення виготовляє радіатори чотирьох моделей. Обмеження на виробництво обумовлені кількістю робочої сили й кількістю сталевих аркушів, з яких виготовляють радіатори (табл. 40).

Таблиця 40

Модель радіатора	А	В	С	Д
Необхідна кількість робочої сили, людино-години	0,5	1,5	2	1,5
Необхідна кількість сталевих аркушів, м^2	4	2	6	8
Прибуток від продажу одного радіатора, грн	5	5	12,5	10

Кількість сталевих аркушів – не більше ніж 2500 м^2 , кількість людино-годин – не більше ніж 5000. Знайти прибуток підприємства. Як зміниться прибуток підприємства, якщо прибуток від продажу одного радіатора кожної моделі збільшиться на 5%, а загальна кількість сталевих аркушів знизиться на 10%?

Варіант 3

Фірма виробляє три види продукції (А, В, С), для випуску кожного з яких потрібний певний час роботи на всіх чотирьох пристроях (I, II, III, IV) (табл. 41).

Таблиця 41

Вид продукції	Час обробки				Прибуток, грн
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Нехай час роботи на пристроях відповідно – 84, 42, 21 і 42 години. Визначити, яку продукцію й у яких кількостях варто виготовляти. Ринок збуту для кожного продукту не обмежений. Як зміниться прибуток, якщо час обробки кожного продукту I і IV пристроєм збільшиться на 7%?

Варіант 4

Фірма виготовляє два продукти A і B, ринок збуту яких не обмежений. Кожний продукт повинен бути оброблений кожною з машин M1, M2 і M3. Час обробки для кожного виробу A і B наведений в таблиці 42.

Таблиця 42

	M1	M2	M3
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Час роботи машин M1, M2 і M3 відповідно 40, 36 і 36 годин на тиждень. Прибуток від виробів становить відповідно 5 і 3 грн. Фірмі необхідно визначити тижневі норми випуску виробів A і B, які максимізують прибуток. Як зміниться прибуток, якщо час роботи машин зменшиться на 15%?

Варіант 5

Прибуток від продажу виробів A, B і C становить відповідно 3, 4, 5 грн. Для кожного виробу потрібен час використання верстатів B1 і B2, які доступні відповідно 12 і 15 годин на день.

Таблиця 43

	A	B	C
B1	2	3	3
B2	4	1	2

Знайти оптимальний план виробництва. Як зміниться план виробництва, якщо доступний час використання верстатів збільшити на 20%?

Варіант 6

Два вироби В1 і В2 послідовно обробляються на верстатах 1, 2, 3, 4, 5. Машинний час на одиницю виробів на кожному верстаті зазначено в таблиці 44. Тут також наведений прибуток від кожного виробу, причому обсяг виробництва другого виду продукції не повинен перевищувати 40% загального випуску.

Таблиця 44

Номер напівфабрикату	Номер робочого місця					Прибуток, грн/од.
	1	2	3	4	5	
1	4	3	2	3	0	1
2	2	0	6	5	4	1,5
Тижневий фонд робочого часу, хв.	352	240	330	420	400	

Визначити оптимальну програму випуску, що забезпечує максимальний прибуток.

Варіант 7

На підприємстві можуть виготовляти два види продукції П1 і П2. На випуск одиниці продукції П1 витрачається 3 одиниці ресурсу, а на одиницю продукту П2 – 1 одиниця того самого ресурсу. У плановому періоді в розпорядженні підприємства є 300 одиниць цього ресурсу. Обмеження на випуск продукції першої й вищої категорій якості виглядають у такий спосіб: $-3x_1 + 4x_2 \leq 0$. При цьому потрібно, щоб продукції П1 було випущено не менше ніж 40 одиниць. Підприємство бажає дістати максимальний прибуток.

Кожний виріб виду П1 дає 3 грн прибутку, кожний виріб виду П2 – 4 грн прибутку.

Варіант 8

Невелика фірма виготовляє два види підшипників А і В, кожний із яких повинен бути оброблений на трьох верстатах, а саме: токарському, шліфувальному й свердлильному. Час, необхідний для кожної стадії виробничого процесу, наведений в таблиці 45.

Таблиця 45

Номер напівфабрикату	Номер робочого місця					Прибуток, грн/шт.
	1	2	3	4	5	
1	4	3	2	3	0	1
2	2	0	6	5	4	1,5
Тижневий фонд робочого часу, хв.	352	240	330	420	400	

Фірма хотіла б виготовляти підшипники в кількості, яка максимізує прибуток. Як зміниться виробництво, якщо повний можливий час роботи в тиждень кожного верстата збільшити на 15%, 20% і 25% відповідно?

Варіант 9

У цеху є 6 типів робочих місць. Відповідно до оптимальної виробничої програми на наступному тижні в цеху повинні виготовляти 7 типів напівфабрикатів. Виробництво одиниці кожного напівфабрикату збільшує фонд матеріального заохочення. Розмір прибутку від одиниці кожного виду напівфабрикату, час, що витрачається на виготовлення кожного напівфабрикату на кожному робочому місці, тижневий фонд робочого часу на кожному робочому місці зазначені в таблиці 46.

Випуск напівфабрикатів 5 не повинен бути меншим ніж 25%, а 7 – не більшим ніж 7% від загального обсягу виробництва. Визначити оптимальну програму випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Таблиця 46

Номер напівфабрикату	Норми робочого часу						Прибуток від од. напівфабрикату, тис. грн/шт.
	1	2	3	4	5	6	
1	5	7	15	2	3	14	0,10
2	2	0	6	7	3	2	0,115
3	5	5	4	1	1	10	0,112
4	4	8	7	0	8	5	0,090
5	3	1	7	2	4	0	0,065
6	6	0	4	3	1	8	0,080
7	10	2	1	11	10	7	0,160
Тижневий фонд робочого часу, тис. хв.	21	18	27	16,8	18,6	24	

Варіант 10

Побудуйте економіко-математичну модель для такої ситуації. Фірма виготовляє три види продукції, використовуючи для цього два види ресурсів. Технологічна матриця задана в таблиці 47. Фірма має у своєму розпорядженні 20 одиниць 1-го ресурсу і 25 одиниць 2-го ресурсу; ціни, за якими фірма припускає реалізувати свою продукцію, дорівнюють 15, 20, 30 тис. грн за 1-й, 2-й, 3-й товар відповідно. Фірма бажає одержати максимальний доход.

Для виконання зобов'язань необхідно виготовляти принаймні 30 продуктів типу 1. Як ця додаткова вимога вплине на доход підприємства?

Таблиця 47

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Ресурс 1	1	2	0
Ресурс 2	2	3	1

Варіант 11

Засоби очищення підлоги оцінюють за такими показниками:

- а) очищаючі засоби;
- б) дезінфікуючі засоби;
- в) подразнюючий вплив на шкіру.

Кожний із цих показників змінюється за лінійною шкалою від 0 до 100.

Продукт на ринку повинен мати принаймні 60 одиниць властивостей, що очищують, і принаймні 60 одиниць дезінфікуючих властивостей за відповідною шкалою. При цьому подразнюючий вплив на шкіру повинний бути мінімальним. Кінцевий продукт повинен бути сумішшю трьох основних очисників, характеристики яких наводяться в таблиці 48.

Сформулювати задачу знаходження оптимальної суміші як задачу лінійного програмування й розв'язати її.

Таблиця 48

Очисник	Очищаючі властивості	Дезінфікуючі властивості	Подразнюючі властивості
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

Варіант 12

Фірма спеціалізується на виробництві меблів для житлових приміщень. Вона може виготовити три типи меблевих гарнітурів А, В, С, що вимагає різних витрат праці на кожній стадії виробництва (табл. 49).

Упродовж тижня можна планувати роботу на лісопилці на 360 люд.-годин, у складальному цеху – на 250 люд.-год., в оздоблювальному – 220 люд.-год. Прибуток від продажу кожного типу гарнітурів А, В, С становить відповідно 900, 1100 і 1500 грн.

Визначити надлишок людино-годин роботи на лісопилці, у складальному цеху, в оздоблювальному цеху.

Для виконання зобов'язань щодо організації інтер'єру готелів необхідно виготовляти принаймні 40 гарнітурів типу С щотижня. Як ця додаткова вимога вплине на план виробництва? Як при цьому зміниться розмір прибутку підприємства?

Таблиця 49

Виробнича ділянка	Витрати праці, люд.-год.		
	А	В	С
Лісопилка	1	2	4
Складальний цех	2	4	2
Оздоблювальний цех	1	1	2

Варіант 13

Фірма виготовляє на фабриці чотири сорти виробів. Виробництво лімітується часом використання верстатів і кількістю комплектуючих виробів (табл. 50). Відомо також, що сумарний час використання верстатів – 90 годин у день, а комплектуючих виробів може бути поставлено не більше ніж 80 за день.

Визначити виробничу програму для одержання максимального прибутку.

Таблиця 50

Виробничі характеристики	Виріб			
	1	2	3	4
Час використання верстата, год.	1	3	8	4
Кількість комплектуючих виробів	2	2	1	3
Собівартість виробу, грн	20	25	40	85
Доход від продажу, грн	30	45	80	45

Фірма може збільшити час роботи верстатів до 100 год., при цьому собівартість кожного виробу всіх чотирьох типів збільшиться на 10 грн. Який буде прибуток фірми в цьому випадку? Чи зміниться виробнича програма?

Безладдя на заводі одного зі споживачів приводить до того, що денний випуск виробу 4 скорочений на 15 одиниць. Як це вплине на план виробництва і розмір прибутку фірми?

Варіант 14

Фірма, що випускає трикотажні вироби, використовує для виробництва продукції два види сировини. Усі необхідні дані наведені в таблиці 51. Розрахувати умови випуску готової продукції, якщо сировина використовується повністю, а прибуток повинний бути максимальним.

Таблиця 51

Сировина	Запас сировини, кг	Витрати на одиницю продукції		
		Светр	Штани	Костюм
Чиста вовна	160	0,4	0,2	0,8
Силон	60	0,2	0,1	0,2
Прибуток за од. виробу		16	15	22

Варіант 15

Цех виготовляє вироби І1 і І2. За зміну не може бути використано більше ніж 540 од. устаткування, більше ніж 550 од. сировини і більше ніж 450 од. електроенергії. Витрати ресурсів на один виріб зазначені в таблиці 52. Від реалізації виробу І1 прибуток становить 80 грн, виробу І2 – 70 грн. Яким повинен бути мінімальний випуск продукції, щоб забезпечити прибуток не менше ніж 2800 грн.

Таблиця 52

Ресурси	Виробу	
	І1	І2
Устаткування	2	3
Сировина	1	4
Електроенергія	2	1,5

Варіант 16

У торговельному залі необхідно виставити для продажу товари Т1 і Т2. Робочий час продавців не перевищує 36 годин, а площа торговельного залу, яку можна зайняти, не перевищує 120 м². Кожна реалізована одиниця товару приносить прибуток відповідно 50 і 80 грн. Норми витрат ресурсів на одиницю проданого товару наведені в таблиці 53. Визначити умови, яким повинна задовольняти структура товарообігу, що забезпечує прибуток не менше ніж 40 000 грн.

Таблиця 53

Ресурси	Товари	
	Т1	Т2
Робочий час, год.	0,4	0,6
Площа, м ²	0,2	0,1

Варіант 17

Компанія виготовляє різні типи меблів для кабінетів. Вона робить столи трьох типів (1, 2, 3). Обсяг роботи, необхідної для кожної операції, наводиться в таблиці 54.

Таблиця 54

Операції	Об'єм роботи, люд.-год.		
	1	2	3
Виготовлення частин	2	3	2
Складання	1	2	3
Полірування й перевірка	1	1	2

Максимум обсягу робіт за тиждень становить 360 люд.-год. на виготовлення частин стола, 240 люд.-год. – на складання й 180 люд.-год. на полірування. Ринок збуту розширюється, але він не довговічний, а можливості зберігання обмежують виробництво 170 столами за тиждень. Прибуток від продажу столів типу 1, 2, 3 становить відповідно 15, 22 і 19 грн. Визначте оптимальний план виробництва.

Як зміниться оптимальний план виробництва, якщо для задоволення потреб цінного клієнта необхідно випускати не менше ніж 30 столів типу 3 за тиждень?

Як зміниться оптимальний план виробництва, якщо через безладдя на ділянці виготовлення частин стола обсяг робіт за тиждень скоротиться вдвічі?

Варіант 18

Фабрика виготовляє два основних типи товару. Виробу типу Т1 потрібно 3 одиниці сировини А й одиниця сировини В. Воно приносить прибуток 3 грн. Виробу типу Т2 потрібно 4 одиниці сировини А й 3 одиниці сировини В. Воно приносить прибуток у 2 грн. Знайдіть оптимальний план виробництва, якщо доступні всього 20 одиниць сировини А й 10 одиниць сировини В.

Як зміниться оптимальний план виробництва, якщо виявиться доступною ще одна одиниця сировини А, а потім і ще одна одиниця сировини В?

Варіант 19

Потрібно визначити план випуску чотирьох видів продукції П1, П2, П3, П4, для виготовлення яких необхідні ресурси трьох типів: трудові, матеріальні, фінансові. Норми витрат ресурсу, кількість кожного виду ресурсу зазначені в таблиці 55. Виходячи з вимог попиту, задані нижні й верхні границі випуску кожного виду продукції. На підставі наведених вихідних даних скласти математичну модель для визначення плану випуску продукції з метою одержання максимального прибутку.

Таблиця 55

Ресурси		Вид продукції				Кількість ресурсу
		П1	П2	П3	П4	
Трудові		1	2	3	4	40
Матеріальні		6	5	4	3	110
Фінансові		4	6	8	12	100
Границі	Нижня	1	5	2	3	-
	Верхня	-	-	-	3	-
Прибуток		60	70	120	130	

Варіант 20

Фірмі потрібне вугілля з вмістом фосфору не більшим ніж 0,03% і з домішкою попелу не більше ніж 3,25%. Доступні три сорти вугілля А, В, С за такими цінами (за тонну) (табл. 56):

Таблиця 56

Сорт вугілля	Вміст домішки фосфору, %	Вміст домішки попелу, %	Ціна, дол.
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

Як їх варто змішати, щоб задовольнити обмеження на домішки й мінімізувати ціну?

Варіант 21

Фірма займається складанням дієти, що містить принаймні 20 одиниць білків, 30 одиниць вуглеводів, 10 одиниць жирів і 40 одиниць вітамінів. Як дешевше цього досягти при зазначених у таблиці 57 цінах на 1 кг (або 1 л) п'яти наявних продуктів?

Таблиця 57

	Хліб	Соя	Сушена риба	Фрукти	Молоко
Білки	2	12	10	1	2
Вуглеводи	12	0	0	4	3
Жири	1	8	3	0	4
Вітаміни	2	2	4	6	2
Ціна	12	36	32	18	10

Варіант 22

Раціон годівлі корів на молочній фермі може складатися з трьох продуктів – сіна, силосу й концентратів. Ці продукти містять живильні речовини – білок, кальцій і вітаміни. Чисельні дані представлені в таблиці 58. З розрахунку на одну корову добові норми споживання білка й кальцію становлять не менше ніж 200 і 210 г відповідно. Споживання вітамінів строго дозоване й повинне дорівнювати 87 мг у добу.

Скласти найдешевший раціон, якщо вартість 1 кг сіна, силосу і концентратів дорівнює відповідно 1,5; 5 і 2 грн.

Таблиця 58

Продукти	Живильні речовини		
	Білок (г/кг)	Кальцій (г/кг)	Вітаміни (мг/кг)
Сіно	50	10	2
Силос	70	6	3
Концентрати	180	3	1

Варіант 23

Споживач вирішує питання про придбання набору з двох видів товарів. Корисність одиниці першого товару дорівнює 100 одиниць, другого – 250 одиниць. Сформулюйте задачу споживача, якщо ціни на товари становлять 500 і 700 грн відповідно, споживач виділив на придбання товарів 2 тис. грн, і функція корисності – лінійна.

Оберіть із цих наборів найкращий з погляду максимуму корисності.

Як зміниться розв'язок задачі споживача, якщо дохід споживача зросте на 10%?

Як зміниться розв'язок задачі споживача, якщо ціна другого товару зросте на 10%?

Варіант 24

Перед проектувальниками автомобіля поставлена задача сконструювати найдешевший кузов, використовуючи листовий метал, скло й пластмасу. Основні характеристики матеріалів представлені в таблиці 59.

Загальна поверхня кузова (разом із дверима і вікнами) повинна становити 14 м^2 , з них не менше ніж 4 м^2 і не більше ніж 5 м^2 треба відвести під скло. Маса кузова не повинна перевищувати 150 кг. Скільки металу, скла й пластмаси повинен використати найкращий проект?

Таблиця 59

Характеристики	Матеріали		
	Метал	Скло	Пластмаса
Вартість, грн/ м^2	25	20	40
Маса, кг/ м^2	10	15	30

Варіант 25

Об'єднання «Норд» виготовляє холодильники, газові плити, морозильні шафи й електропечі за ціною 200, 180, 250 і 100 грошових одиниць відповідно. Постійним фактором, що обмежує обсяги виробництва, є фіксована величина трудових ресурсів – 12 000 людино-годин на місяць. З'ясувалося, однак, що в найближчий місяць дефіцитною буде й листова сталь для корпусів зазначених виробів, оскільки постачальники зможуть забезпечити лише 7000 м^2 цього матеріалу.

Потрібно скласти план виробництва на даний місяць для того, щоб максимізувати вартість випущеної продукції. Відомо, що для виготовлення холодильника потрібно 2 м^2 листової сталі й 3 люд.-год. робочого часу, для газової плити відповідно – $1,5 \text{ м}^2$ і 3 люд.-год., для морозильної шафи – 3 м^2 і 4 люд.-год., для електропечі – 1 м^2 і 2 люд.-год.

Варіант 26

Учасник експедиції «Північний полюс» складає рюкзак, і йому потрібно вирішити, які покласти продукти. У його розпорядженні є м'ясо, борошно, сухе молоко й цукор. У рюкзаку для продуктів залишилося лише 45 дм^3 об'єму, і потрібно, щоб сумарна маса продуктів не перевищувала 35 кг. Лікар експедиції рекомендував, щоб м'яса (по масі) було більше, ніж борошна принаймні у два рази, борошна не менше, ніж молока, а молока принаймні у вісім разів більше, ніж цукру. Скільки і яких продуктів потрібно покласти в рюкзак, для того щоб сумарна калорійність продуктів була найбільшою? Характеристики продуктів наведені в таблиці 60.

Таблиця 60

Характеристики	Продукти			
	М'ясо	Борошно	Молоко	Цукор
Об'єм, $\text{дм}^3/\text{кг}$	1	1,5	2	1
Калорійність, ккал/кг	1500	5000	5000	4000

Варіант 27

На звірофермі можуть вирощуватися песці, чорно-бурі лисиці, нутрії й норки. Для їхнього харчування використовується три види кормів. У таблиці 61 наведені норми витрат кормів, їхній ресурс із розрахунку на день, а також прибуток від реалізації однієї шкурки кожного звіра.

Визначте, скільки і яких звірків варто вирощувати на фермі, щоб прибуток від реалізації шкурок був максимальним.

Таблиця 61

Вид корму	Норми витрати корму (кг/день)				Ресурси кормів, кг
	Песець	Лисиця	Нутрія	Норка	
Корм 1	1	2	1	2	300
Корм 2	1	4	2	0	400
Корм 3	1	1	3	2	600
Прибуток, дол./шкурка	6	12	8	10	

Варіант 28

Завод виготовляє корпуси холодильників і комплектує їх устаткуванням, що поставляють без обмежень інші підприємства. У таблиці 62 зазначені норми трудовитрат, витрат матеріалів для виготовлення корпусів, обмеження по цих ресурсах із розрахунку на місяць і прибуток від реалізації холодильників по кожній із п'яти марок.

Знайти місячний план випуску холодильників, який максимізує прибуток.

Таблиця 62

Ресурси	Марки холодильників					Об'єм ресурсу
	Донбас	Мінськ	Снайге	Ока	Норд	
Трудовитрати	2	3	5	4	4	9000
Метал, м ²	2	2	4	5	0	8500
Пластик, м ²	1	3	2	0	4	4000
Фарба, кг	1	2	3	3	2	5000
Прибуток, грн	40	70	120	120	50	

Варіант 29

Розподілити групи профілерозмірів прокату між верстатами таким чином, щоб собівартість продукції була мінімальною. Вихідні дані: п'ять груп профілерозмірів прокату одержують на трьох верстатах. Фонд робочого часу верстатів В1, В2 і В3 дорівнює відповідно 7200, 8000 і 7500. Інші дані наведені в таблиці 63.

Таблиця 63

Групи профілерозмірів	Планове завдання	Продуктивність верстатів, т/год.			Собівартість прокату, тис. грн/т		
		31	32	33	31	32	33
1	30	20	30	10	80	70	105
2	40	15	15	15	100	96	90
3	100	20	20	18	120	120	120
4	20	15	15	15	85	90	95
5	80	19,5	25	30	120	110	85

Варіант 30

Компанія виготовляє свердлильні верстати трьох видів D1, D2 і D3. Кожний вид приносить відповідно 10, 10 і 30 дол. прибутку. Кількість верстатів, що можуть бути виготовлені впродовж тижня, обмежено поставками комплектуючих виробів A1, A2, A3, де для D1 потрібно 1 од. A1, 4 од. A2

і 2 од. А3, для D2 – 2 од. А1, 3 од. А2 і 3 од. А3, а для D3 потрібно 10 од. А1, 10 од. А2 і 8 од. А3. Щотижня кількість доступних виробів А1, А2, А3 становить відповідно 650, 850 і 650 од.

Визначте максимальний прибуток, який можна одержати за тиждень. Яку кількість верстатів вигідніше всього виготовляти?

Компанія звертається в комісію з цін за дозволом підвищити ціни настільки, щоб вони давали 25%-не збільшення прибутку від усіх моделей. Розглянувши питання, комісія дозволяє збільшення цін на верстати D1 і D2, але наполягає на такій організації ціни на верстат D3, при якому прибуток від продажу верстата D3 зменшився б на 10%. Чи варто компанії погоджуватися з варіантом, запропонованим комісією з цін? Що в цьому випадку відбудеться з прибутком?

Керівництво компанії зв'язане угодою, що забезпечує зайнятість 300 робітників. Якщо можливості виробництва дозволяють одному робітникові впродовж тижня зробити 1 верстат D1 і 1 верстат D2, а п'яти робітникам – 1 верстат D3, то як ця угода вплине на новий розв'язок? Який буде прибуток у цьому випадку?

Варіант 31

Чаєрозважувальна фабрика випускає чай сорту «Травневий» і «Бадьорість», змішуючи три інгредієнти: індійський, грузинський і краснодарський. У таблиці 64 наведені норми витрат інгредієнтів, об'єм запасів кожного інгредієнта й прибуток від реалізації 1 тонни чаю сортів «Травневий» і «Бадьорість».

Потрібно скласти план виробництва з метою максимізації прибутку.

Таблиця 64

Інгредієнти	Норми витрати, т/т		Об'єм запасів, т
Індійський чай	0,5	0,2	600
Грузинський чай	0,2	0,6	870
Краснодарський чай	0,3	0,2	430
Прибуток від реалізації 1 т чаю, дол.	320	290	

Варіант 32

Підприємець збирається робити сплав, що вміщує 30% свинцю, 30% цинку й 40% олова. Припустимо, що на ринку є сплави А, В, С, D,, склад й ціни на які наведені в таблиці 65. Яку кількість сплаву кожного типу варто закупити на кожний кг виробленої суміші? Яку кількість сплаву кожного типу варто закупити на кожний кг виробленої суміші при мінімальних витратах?

Таблиця 65

Сплав	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Необхідна суміш
% свинцю	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
% цинку	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
% олова	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Вартість за кг, дол.	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3	

Варіант 33

Необхідно знайти оптимальний план розвитку металургійних підприємств для задоволення потреб району в сортовому прокаті. Потреба прокату задана в динаміці (на 1995, 2000, 2005 рр). Розроблено три варіанти розвитку для I і по два варіанти для II і III підприємств. Варіанти розрізняються структурою й динамікою обсягу виробництва по роках планового періоду, а також наведеними витратами на їхнє здійснення (табл. 66).

Оптимізація плану полягає у виборі з відомих варіантів розвитку кожного підприємства таких, реалізація яких дозволяє забезпечити задану потребу в сортовому прокаті по роках планового періоду з мінімальними сукупними наведеними сортами.

Для кожного підприємства може бути обрано не більше одного варіанта реконструкції й розвитку.

Таблиця 66

Роки	Вихідні дані	I			II		III		Задана потреба в прокаті
		Варіанти розвитку							
		1	2	3	1	2	1	2	
1995	Великий	200	200	450	300	600	-	-	500
	Середній	250	250	250	1000	500	600	-	1800
	Дрібний	250	850	850	150	650	-	600	1000
2000	Великий	800	800	1300	300	600	-	-	1100
	Середній	600	1000	1100	800	600	1200	-	1800
	Дрібний	250	850	1150	400	1100	-	1100	1250
2005	Великий	800	800	1300	900	1050	-	-	1700
	Середній	1000	1000	1500	800	1000	1650	-	3200
	Дрібний	700	1200	1600	1300	1100	-	1600	2500
Приведені інтегральні витрати, млн грн		450	510	836	531	630	302	288	-

Варіант 34

На кінець планового періоду в економічному районі для задоволення потреб цього району в прокаті необхідно зробити 1100 тис. т листового й 1000 тис. т сортового прокату. Виробництво прокату організоване на трьох

підприємствах, для кожного з яких розроблені по два варіанти їхньої реконструкції, що розрізняються як витратами на їхню реалізацію, так і структурою виробництва. Крім того, установлені ліміти на споживання ресурсів двох видів (табл. 67).

Необхідно обрати для кожного підприємства такий варіант реконструкції, при якому забезпечується виробництво листового й сортового прокату на трьох підприємствах у розмірах, не менших від заданих, при цьому мінімізуються сумарні наведені витрати на виробництво.

Для кожного підприємства у розв'язання включають не більше одного варіанту реконструкції.

Таблиця 67 – Варіанти реконструкції підприємств і обмеження задачі

Вихідні дані		I		II		III		Потреба в продукції й ліміти ресурсів
		Варіанти реконструкції						
		1	2	1	2	1	2	
Продукція, тис. т	Листовий прокат	300	100	1000	500	600	200	1100
	Сортовий прокат	250	500	100	500	-	700	1000
Ресурси, що лімітуються	1-го виду, тис. т	300	250	500	400	350	650	1200
	2-го виду, тис. т	55	60	190	100	80	90	250
Витрати на весь варіант, млн. грн		100	120	190	160	140	210	-

Варіант 35

Цех випускає три види деталей, які виготовляються на трьох верстатах. На рисунку 17 показана технологічна схема виготовлення деталі кожного виду із вказівкою часу її обробки на верстатах. Добовий ресурс робочого часу верстатів 1, 2, 3 становить відповідно 890, 920 і 840 хвилин. Вартість однієї деталі виду 1, 2, 3 дорівнює відповідно 3, 2 і 1 грн. Потрібно скласти добовий план виробництва з метою максимізації вартості випущеної продукції.

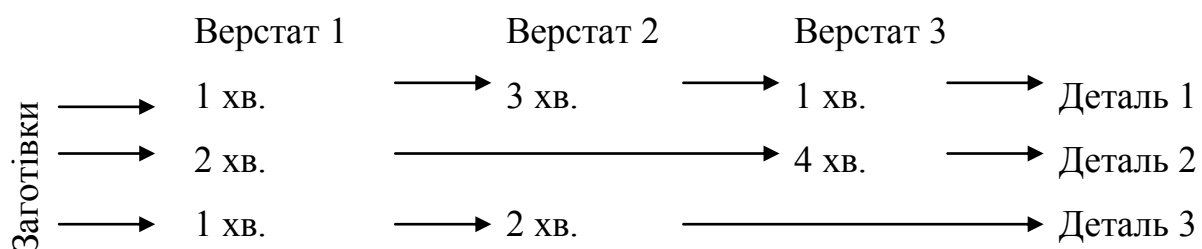


Рисунок 17

Варіант 36

Для виробництва трьох видів виробів (А, В і С) використовується сировина типу 31, 32 і 33, причому закупівлі сировини типу 31 і 32 обмежені можливостями постачальників. У таблиці 68 наведені норми витрат сировини, ціни на сировину й на вироби, а також обмеження по закупівлі сировини (значення А, В і С брати у табл.69). Потрібно оптимізувати план виробництва продукції з метою максимізації прибутку.

Таблиця 68

Тип сировини	Ціна 1 кг сировини, грн	Норми витрат сировини на один виріб, кг			Обмеження по закупівлі сировини, кг
		А	В	С	
31	2	1	3	А	3000
32	1	4	1	3	-
33	В	6	5	2	3320
	Ціна одного виробу, грн	$6B + 12$	$5B + 22$		

Таблиця 69

	А	В	С		А	В	С
1	2	1	17	11	3	3	26
2	2	2	19	12	3	4	26
3	2	3	21	13	4	1	25
4	2	4	23	14	4	1	27
5	3	1	21	15	4	2	26
6	3	1	22	16	4	2	27
7	3	2	23	17	4	3	28
8	3	2	24	18	4	3	30
9	3	2	25	19	4	4	30
10	3	3	25	20	4	4	32

Варіант 37

Була запропонована така проста модель сільськогосподарського виробництва в Донецькій області для зовнішнього ринку. Є три основних культури, що ростуть у цьому кліматі, і вирощуватися вони можуть на одному з двох типів орних земель. У цей час для обробки придатні 1 400 000 га землі типу І і 1 200 000 га землі типу ІІ. Різні типи культур по-різному ростуть на різних землях. Підраховано, що чистий урожай культури i на землі типу j становить R_{ij} (табл. 70).

Усі культури вимагають додаткового зрошення (іригаційного). Наявна іригаційна система забезпечує $5\,600\,000\text{ м}^3$ води в рік. Для одного га культури i , вирощеної на землі типу j , треба $W_{ij}\text{ м}^3$ у рік (табл. 71).

Таблиця 70

I	R _{ij}	
	J = I	J = II
1	6	6
2	88	5
3	4	5

Таблиця 71

I	W _{ij}	
	J = I	J = II
1	2	3
2	3	2
3	3	1

Населення, зайняте в сільському господарстві, становить 700 000 чоловік. Щоб одержати врожаї 1, 2, 3 з кожних 10 га землі, для виконання різних робіт із вирощування культур впродовж 1 року потрібно відповідно 2, 1 і 3 чоловік.

Визначте, які культури, у якій кількості й на яких землях необхідно вирощувати, щоб одержати максимальний урожай? Який розмір максимального врожаю?

Варіант 38

Стандартом передбачено, що октанове число автомобільного бензину А-76 повинне бути не нижчим ніж 76, а вміст сірки не більшим ніж 0,3%. Для виготовлення такого бензину на Лисичанському заводі використовується суміш чотирьох компонентів. Дані про ресурси компонентів, що змішують, їхня собівартість і їхні октанові числа, а також дані про вміст сірки наведені в таблиці 72.

Потрібно визначити, скільки тонн кожного компонента варто використати для одержання 1000 т автомобільного бензину А-76, щоб його собівартість була мінімальною.

Таблиця 72

Характеристика	Компоненти автомобільного бензину			
	1	2	3	4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,30	0,20
Ресурси, т	700	600	500	300
Собівартість, дол./т	40	45	60	90

Варіант 39

На ділянку споруджуваної дороги необхідно вивезти 20 000 м³ кам'яних матеріалів. У районі будівництва є три кар'єри із запасами 8000 м³, 9000 м³, 10 000 м³. Для навантаження матеріалів використовуються екскаватори, що мають продуктивність 250 м³ у зміну в кар'єрах 1 і 2 і 500 м³ у зміну в кар'єрі 3.

Ці кар'єри забезпечують кам'яними матеріалами також ряд інших споруджуваних об'єктів. На навантаження матеріалів для розглянутої ділянки виділений для екскаваторів загальний ліміт 60 машино-змін із правом використання його за розсудом будівельників.

Транспортні витрати на перевезення матеріалів характеризуються показниками: для перевезення 10 000 м³ матеріалів із кар'єру 1 потрібно 1000 автомобіле-змін, з кар'єру 2 – 1350, з кар'єру 3 – 17 000 змін. Потрібно знайти оптимальний план перевезень, що забезпечує мінімальні транспортні витрати.

Варіант 40

Цех випускає три види деталей, які виготовляються на двох верстатах. На рис. 18 показана технологічна схема виготовлення деталей кожного виду з указівкою часу її обробки на верстатах.

Задано добовий ресурс робочого часу кожного верстата: В хв. для верстата 1, С хв. для верстата 2 (табл. 73). Вартість однієї деталі видів 1, 2, 3 становить 3, 2 і 1 грн відповідно. Потрібно скласти добовий план виробництва деталей з метою максимізації вартості випущеної продукції.

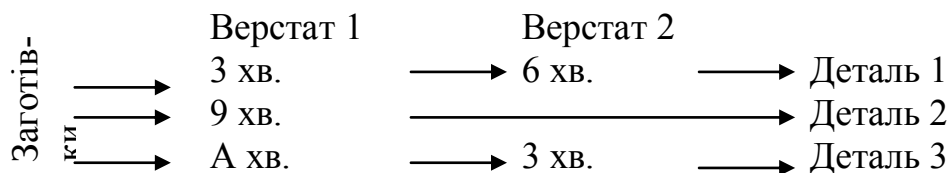


Рисунок 18

Таблиця 73

	А	В	С		А	В	С
1	3	600	900	11	5	870	900
2	3	960	600	12	5	930	450
3	3	510	750	13	3	720	900
4	4	690	450	14	3	960	420
5	5	660	900	15	4	660	900
6	5	840	450	16	4	870	450
7	3	660	900	17	5	630	270
8	3	960	510	18	3	600	750
9	4	600	900	19	4	720	900
10	3	780	450	20	4	750	360

Варіант 41

У пекарні для випікання чотирьох видів хліба використовується борошно двох сортів, маргарин і яйця. Наявне устаткування, виробничі площі й поставки продуктів такі, що в добу можна переробити не більше А кг борошна сорту 1, В кг борошна сорту 2, С кг маргарину, D штук яєць. У таблиці 74 наведені норми витрат продуктів, а також прибуток від продажу 1 кг хліба кожного виду. Значення А, В, С, D брати у табл. 75.

Потрібно визначити добовий план випічки хліба, що максимізує прибуток.

Таблиця 74

Найменування продукту	Норми витрат на 1 кг хліба (по видах)			
	1	2	3	4
Борошно сорту 1, кг	0,5	0,5	0	0
Борошно сорту 2, кг	0	0	0,5	0,5
Маргарин, кг	0,0125	0	0	0,12
Яйце, шт.	2	1	1	1
Прибуток, коп.	14	12	5	6

Таблиця 75

	A	B	C	D		A	B	C	D
1	250	200	60	1380	11	210	180	50	1180
2	290	200	70	1540	12	260	190	60	1380
3	350	200	80	1740	13	300	200	70	1560
4	380	200	90	1880	14	330	210	80	1720
5	290	150	50	1280	15	370	220	90	1900
6	300	150	60	1380	16	220	160	50	1160
7	310	150	70	1480	17	270	210	60	1440
8	330	150	80	1600	18	310	190	70	1560
9	400	150	90	1820	19	340	200	80	1720
10	240	100	50	1080	20	390	180	90	1820

Варіант 42

Прядильна фабрика для виробництва двох видів пряжі використовує три типи сировини – чисту вовну, капрон і акрил. У таблиці 76 зазначені норми витрат сировини і її загальна кількість, яку можна використати фабрикою впродовж року, і прибуток від реалізації тонни пряжі кожного виду (значення А, В і С брати у табл. 77).

Потрібно скласти річний план виробництва пряжі з метою максимізації сумарного прибутку.

Таблиця 76

Тип сировини	Норми витрати сировини на 1 тону пряжі, т		Кількість сировини, т
	Вид 1	Вид 2	
Вовна	0,5	0,2	600
Капрон	A	0,6	B
Акрил	0,5-A	0,2	C
Прибуток від реалізації пряжі, грн	1100	90	

Таблиця 77

	A	B	C		A	B	C
1	0,1	620	500	11	0,2	710	400
2	0,1	730	500	12	0,2	880	410
3	0,1	840	500	13	0,2	810	410
4	0,1	650	510	14	0,2	740	410
5	0,1	760	510	15	0,3	660	300
6	0,1	870	510	16	0,3	690	300
7	0,1	790	520	17	0,3	720	300
8	0,2	920	400	18	0,3	750	300
9	0,2	850	400	19	0,3	780	300
10	0,2	780	400	20	0,3	800	300

Варіант 43

Припустимо, що з двох складів розвозять товари по трьох магазинах, вартість перевезень одиниці продукції задана у вигляді таблиці 78. Побудуйте транспортну задачу, якщо на 1-му складі зберігається 100 од. продукції, на 2-му – 150 одиниць, у 1-й магазин потрібно доставити 70 одиниць продукції, у 2-й – 80, у 3-й – 100 одиниць продукції відповідно.

Таблиця 78

	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3
Склад 1	10	18	15
Склад 2	16	20	10

Варіант 44

Фірма АМІК повинна відправити деяку кількість персональних комп'ютерів із трьох складів у п'ять магазинів. На складах є відповідно 15, 25, 20 комп'ютерів, а для п'яти магазинів потрібно відповідно 20, 12, 5, 8 і 12 комп'ютерів. Вартість перевезення одного комп'ютера (у доларах) зі складу в магазин наведена в таблиці 79.

Як варто спланувати перевезення для мінімізації вартості?

Таблиця 79

Склад	Магазини				
	Фокстрот	Биттехніка	Про	Матриця	Ост-Вест
1	1	0	3	4	2
2	5	1	2	3	3
3	4	8	1	4	3

Варіант 45

Визначте взаємозв'язок пунктів поставки й закупівлі вагонів при такій характеристиці транспортної мережі (табл. 80):

Таблиця 80

Постачальники вагонів	Ресурси вагонів, шт.	Відстань до пунктів завантаження, км			
		2	3	1	4
1-й	120	2	3	1	4
2-й	65	3	2	4	6
3-й	35	5	3	6	3
Потреба у вагонах, шт.		90	70	40	20

Варіант 46

Припустимо, що в Полтаві, Сумах і Харкові знаходяться три консервних заводи. Ці консервні заводи можуть робити відповідно 250, 500 і 750 ящиків консервів у день. Для реалізації продукції в Україні є п'ять складів оптової торгівлі: у Києві, Донецьку, Дніпропетровську, Запоріжжі й Луганську. Кожний склад може продати до 300 ящиків за день. Фахівець, зайнятий розподілом продукції, хоче визначити число ящиків, що повинні бути доставлені від трьох консервних заводів до п'яти збутових складів так, щоб кожний склад міг одержати стільки ящиків, скільки може продати щодня, а транспортні витрати були б мінімальними. У таблиці 81 зазначена вартість транспортування ящика (дол.).

Таблиця 81

	Полтава	Суми	Харків
Київ	0,90	2,50	0,60
Донецьк	1,80	1,70	1,80
Дніпропетровськ	1,50	1,80	2,50
Запоріжжя	1,00	2,00	1,40
Луганськ	2,70	1,80	1,60

Варіант 47

Компанія запланувала переміщення багатьох службовців на нові посади відповідно до нового штатного розкладу. Службовці, яких стосується ця реформа, можуть бути по кваліфікації й досвіду розділені на п'ять груп Г1, Г2, Г3, Г4 і Г5, що містять відповідно 2, 5, 4, 8 і 6 службовців. Аналогічним чином кожен посаду можна віднести до однієї з наступних чотирьох груп: Д1, Д2, Д3 і Д4 – по 8, 3, 9 і 5 посад відповідно. У таблиці 82 вказуються, які групи службовців мають достатню кваліфікацію для того, щоб здобути відповідні посади.

Таблиця 82

Посади	Групи				
	Г1	Г2	Г3	Г4	Г5
Д1		+		+	
Д2				+	+
Д3	+			+	
Д4	+	+	+		+

Варіант 48

Потрібно транспортувати вантаж одного виду, що перебуває у двох постачальників А1 і А2, до трьох споживачів В1, В2 і В3. Кожний із постачальників має деякий запас товарів: А1 – 100 одиниць, А2 – 200 одиниць. Кожний споживач характеризується своїм попитом на товари: В1 – 80 од., В2 – 130 од., В3 – 90 од.. Можливі варіанти транспортування й вартість перевезення одиниці вантажу (дол.) зазначені в таблиці 83.

Таблиця 83

Постачальник	Споживач			Ресурс
	В1	В2	В3	
А1	7	9	2	100
А2	20	15	16	200
Потреба	80	130	90	

Потрібно визначити, яку кількість вантажу варто відправити від кожного постачальника кожному споживачеві, щоб сумарні транспортні витрати були мінімальними.

Варіант 49

У певний день підприємство з перевезення вантажів повинне забрати вантажі в п'ятих місцях 1, 2, 3, 4, 5. Підприємство має п'ять вантажівок різних типів. Вартість перевезення одиниці вантажу кожним типом вантажівки до пункту призначення наведена в таблиці 84.

У пунктах 1, 2, 3, 4, 5 необхідно забрати відповідно 60, 30, 100, 50, 40 тонн вантажу. Кожний із типів вантажівок може перевезти за день відповідно 40, 60, 20, 30, 20 тонн вантажу відповідно. Визначте розподіл вантажів по вантажівках, що мінімізує загальну вартість.

Таблиця 84

Тип вантажівок	Вартість перевезень, грн				
	1	2	3	4	5
Тип 1	30	20	40	10	20
Тип 2	30	10	30	20	30
Тип 3	40	10	10	40	10
Тип 4	20	20	40	20	30
Тип 5	30	20	10	30	40

Варіант 50

Компанія володіє двома фабриками Ф1 і Ф2, що виготовляють електронне устаткування. Фабрики впродовж деякого періоду випускають 16 і 12 тис. виробів відповідно. Компанія постачає трьох споживачів 31, 32 і 33, потреби яких впродовж одного й того самого періоду становлять відповідно 10, 13 і 7 тис. виробів. Вартість перевезень 1 тис. виробів споживачеві з фабрик наведена в таблиці 85.

Сформулюйте задачу як транспортну й розв'яжіть її. Яким чином необхідно переглянути план перевезень, якщо виробничі можливості фабрик Ф1 і Ф2 зростуть відповідно до 20 і 14 тис. виробів?

Таблиця 85

Фабрика	Споживач		
	31	32	33
Ф1	5	4	6
Ф2	6	3	2

Варіант 51

Компанія володіє заводами А, В і С. Відповідні обсяги виробництва 6000, 3000 і 3000 одиниць. Компанія зобов'язалася поставляти відповідно 1500, 2500, 2700 і 3300 одиниць у міста Г1, Г2, Г3, Г4. При заданих вартостях перевезень (табл. 86) складіть оптимальні плани перевезень.

Таблиця 86

Місто	Вартість транспортування, грн		
	А	В	С
Г1	1	9	6
Г2	4	2	1
Г3	1	2	7
Г4	9	8	3

Варіант 52

Фірма запропонувала власникам трьох авіаліній перевозити бригади фахівців у різні частини світу. Вартість перевезень у тис. грн наведена в таблиці 87.

Адміністрація фірми вирішила, що індивідуальні контракти на перевезення будуть укладатися з власниками ліній Київ, Харків, Донецьк у співвідношенні 2:3:2, і повідомила про це керуючого транспортними перевезеннями, а також сповістила його про те, що з 70 намічених на наступний рік перевезень 10 – до ОАЕ, 15 – на Кіпр, 20 – на Мальту, 10 – до Туреччини й 15 – до Єгипту.

Як йому варто розподілити індивідуальні контракти на перевезення для мінімізації загальної вартості за умови задоволення запитів адміністрації фірми? Яка мінімальна вартість перевезень, що задовольняють наведеним вище обмеженням?

Таблиця 87

Авіалінія	ОАЕ	Кіпр	Мальта	Туреччина	Єгипет
Київ-Авіа	24	16	8	10	14
Харків-Авіа	21	15	7	12	16
Донецьк-Авіа	23	14	7	14	20

Варіант 53

Урядовий заклад одержав такі пропозиції від фірм Ф1, Ф2 і Ф3 на купівлю фірмових пальто трьох розмірів X, XL, XXL (табл. 88).

Повинні бути укладені контракти на продаж 1000 пальто розміру L, 1500 пальто розміру XL, 1200 пальто розміру XX, однак обмеженість виробничих потужностей фірм приводить до того, що загальна кількість замовлень не може перевершувати 1000 пальто для фірми Ф1, 1500 пальто для фірми Ф2 і 2500 пальто для фірми Ф3. Необхідно, щоб ці контракти були укладені з мінімізацією загальної вартості, однак обмеження повинні бути розподілені по фірмах як можна справедливніше. Як варто розподілити замовлення для виконання цих вимог?

Таблиця 88

Фірма	Вартість одного пальто, дол.		
	L	XL	XXL
Ф1	110	115	126
Ф2	107	115	130
Ф3	104	109	116

Варіант 54

Сталеплавильна компанія має три заводи (М1, М2 і М3), здатні виробити за деякий проміжок часу відповідно 50, 30 і 20 тис. тонн сталі. Свою продукцію компанія поставляє чотирьом споживачам 31, 32, 33 і 34, потреби яких становлять відповідно 12, 15, 25 і 36 тис. тонн сталі. Вартість виробництва й транспортування 1 тис. тонн сталі з різних заводів різним споживачам наведена в таблиці 89.

Визначте мінімальні загальну вартість, обсяги виробництва на кожному заводі й плани перевезень.

Таблиця 89

Споживач	Завод		
	М1	М2	М3
31	15	19	14
32	19	18	16
33	19	18	20
34	15	19	18

Варіант 55

Чотири сталеливарних заводи (1, 2, 3 і 4) виробляють щотижня відповідно 950, 300, 1350 і 450 тонн сталі певного сорту. Сталеві болванки повинні бути передані споживачам П1, П2, П3, П4 і П5, щотижневі запити яких становлять відповідно 250, 1000, 700, 650 і 450 тонн сталі.

Вартість транспортування від заводів до споживачів наведена в таблиці 90.

Який потрібно скласти план розподілу сталевих болванок, щоб мінімізувати загальну вартість?

Таблиця 90

Завод	Споживач				
	П1	П2	П3	П4	П5
1	12	16	21	19	32
2	4	4	9	5	24
3	3	8	14	10	26
4	24	33	36	34	49

Варіант 56

У деякій місцевості у двох пунктах А і В є потреба в додатковому транспорті. У пункті А потрібно 5 додаткових автобусів, а в пункті В – 7. Відомо, що 3, 4 і 5 автобусів можуть бути отримані з гаражів Г1, Г2 і Г3.

Як варто розподілити ці автобуси між пунктами А і В, щоб мінімізувати їхній сумарний пробіг? Відстані від гаражів до пунктів А і В наведені в таблиці 91.

Таблиця 91

Гараж	Відстань до пунктів, км	
	А	В
Г1	3	4
Г2	1	3
Г3	4	2

Варіант 57

Заводи фірми розташовані в містах Г1 і Г2. Вони доставляють товари на склади міст З1, З2 і З3. Відстані між цими містами наведені в таблиці 92.

Завод у місті Г1 випускає за рік 600 т товарів, у місті Г2 – 500 т. Склад З1 уміщає 400 т, З2 – 600 т, З3 – 300 т. Як варто транспортувати товари для мінімізації цін на перевезення?

На дорозі Г1-Г2 ведуться роботи, що подвоюють вартість перевезень по ній. Як би ви переглянули план перевезень?

Таблиця 92

	З1	З2	З3
Г1	40	110	190
Г2	170	100	150

Варіант 58

В області є два цементних заводи й три домобудівних комбінати – споживачі їхньої продукції. У таблиці 93 зазначені добові обсяги виробництва цементу, добові потреби в ньому комбінатів і вартість перевезення 1 т цементу від кожного заводу до кожного комбінату.

Потрібно скласти план добових перевезень цементу з метою мінімізації транспортних витрат.

Таблиця 93

Заводи	Виробництво цементу (т/доба)	Вартість перевезення 1 т цементу, дол.		
		Комбінат 1	Комбінат 2	Комбінат 3
1	40	10	15	20
2	60	20	30	30
	Потреба в цементі, т/добу	50	20	30

Варіант 59

У місті А намічено провести міську олімпіаду з математики серед школярів, причому окремо за сімома розділами. Для цього кожна школа повинна представити на олімпіаду по 7 школярів для участі по одному в кожному розділі.

Кожна школа визначила по 7 школярів у команду. Причому відомо, що кожний із семи учнів може за відпущений час розв'язати правильно певну кількість задач (табл.. 94).

Визначте, хто й у якому розділі олімпіади повинен брати участь.

Таблиця 94

Номер учасника	Кількість правильно розв'язаних задач по кожному із семи розділів						
	Номер розділу						
	1	2	3	4	5	6	7
1	11	15	20	16	13	26	11
2	12	13	22	14	16	29	13
3	14	16	24	22	22	32	16
4	14	12	20	19	20	31	15
5	16	13	22	20	23	34	17
6	13	15	18	14	26	29	18
7	12	11	16	17	17	24	10

Варіант 60

П'ять співробітників із номерами 1, 2, 3, 4, 5 здатні виконати п'ять завдань із номерами 31, 32, 33, 34, 35. Через різну кваліфікацію на виконання цих завдань їм буде потрібний різний час. Як варто розподілити людей по завданнях, щоб мінімізувати час виконання? Час виконання (у годинах) наведений у таблиці 95.

Таблиця 95

Співробітники	Завдання				
	31	32	33	34	35
1	10	5	9	18	11
2	13	19	6	12	14
3	3	2	4	4	5
4	18	9	12	17	15
5	11	6	14	19	10

Варіант 61

На новорічному вечорі буде проведений конкурс серед танцювальних пар. Дев'ять юнаків і дев'ять дівчат давно знайомі один з одним і знають, хто з ким і як танцює. Якість виконання танців парами по п'ятибальній системі в різних поєднаннях партнерів оцінюється так, як це показано в таблиці 96.

Як потрібно скласти танцювальні пари, щоб у сумі набрати найбільшу кількість балів?

Таблиця 96

	Андрій	Борис	Віктор	Олексій	Дмитро	Георгій	Іван	Ілля	Леонід
Ганна	3	4	5	2	4	5	3	2	5
Інна	4	4	2	4	5	4	5	5	3
Галина	2	4	3	5	4	5	3	4	5
Дар'я	3	4	5	5	3	4	4	3	3
Марія	4	5	5	3	4	5	3	5	4
Кира	3	2	3	5	4	5	2	3	5
Ірина	5	2	4	3	2	5	3	4	5
Лариса	3	3	2	5	4	4	5	5	4
Ніна	4	5	2	3	4	4	3	5	4

17 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- 1 Дайте визначення таким термінам:
 - математичне програмування;
 - лінійне та квадратичне програмування;
 - цільова функція;
 - система обмежень;
 - план задачі;
 - математична модель;
 - припустиме розв'язання і оптимальний план задачі.
- 2 Як записати задачу лінійного програмування в матричній формі.
- 3 Як обрати метод розв'язання формалізованої задачі.
- 4 Як знайти за графіком оптимальне значення цільової функції.
- 5 Типи задач ЛП: стандартна, канонічна, загального виду.
- 6 Як одержати двоїсту задачу.
- 7 Як визначити тип транспортної задачі.
- 8 Які два типи задач міжгалузевого балансу Ви знаєте.
- 9 Поняття нелінійного програмування.
- 10 Поняття багатокритеріальних задач в економіці.
- 11 Алгоритм побудування двоїстої задачі до задачі канонічного виду.
- 12 Глобальний екстремум, умовний екстремум, найбільше й найменше значення функції в області.
- 13 Алгоритм побудування двоїстої задачі до задачі загального виду.
- 14 Алгоритм знаходження найбільшого значення функції в деякій області (нелінійне програмування).
- 15 Алгоритм побудування двоїстої задачі до задачі стандартного виду.

18 ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ З КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 6x_2 - x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 4x_3 \leq 4 \\ x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 При розв'язанні прямої й двоїстої задач одержали $F_{\max} = G_{\min}$. Що можна сказати про даний розв'язок. На підставі якої теореми?

Варіант 2

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 - 4x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_3 + 5x_4 \leq 8 \\ x_1 = 3x_2 \\ 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 \geq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Після розв'язання двоїстої задачі одержали такі оцінки ресурсів: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$. Що можна сказати про ресурси прямої задачі. На підставі якої теореми?

Варіант 3

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 17 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 12 \\ x_2 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Після розв'язання двоїстої задачі одержали такі обмеження: $2 = 2$, $3 > 2$, $4.5 = 4.5$. Що можна сказати про план прямої задачі (які технології вигідні)? На підставі якої теореми?

Варіант 4

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Після розв'язання прямої й двоїстої задач одержали $F_{\max} = 50$, $y_1 = 2$, $y_2 = 1$. Перший ресурс збільшили на 3 одиниці й знайшли новий розв'язок. Чому дорівнює нове значення цільової функції? Відповідь пояснити.

Варіант 5

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Після розв'язання прямої задачі одержали такі значення: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Що можна сказати про виконання обмежень двоїстої задачі? На підставі якої теореми?

Варіант 6

1 Побудувати двоїсту задачу до задачі ЛП.

$$\begin{aligned} z &= x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\ 3x_2 + 5x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Після розв'язання прямої задачі одержали такі обмеження: $25 = 25$, $43 < 45$, $55 = 55$. Що можна сказати про двоїсті оцінки ресурсів? На підставі якої теореми?

ДОДАТОК А ПАКЕТ MAPLE

1 Декотрі дані про роботу в пакеті Maple

Пакет є командним пакетом, тому що працює з командами (операторами), які треба набирати на клавіатурі. Виконується оператор після натискування на клавішу **Enter**. Пропозицією для введення оператора є знак **[>**. Команди розділяються символами «:» або «;». Якщо команда закінчується символом «:», то результат її виконання на екран не виводиться. Якщо команда закінчується символом «;», то результат її виконання виводиться на екран.

Абетка **Maple** містить букви латинської абетки від *a* до *z* і від *A* до *Z*, цифри від 0 до 9 і 32 спеціальних знаки. До спеціальних знаків відносяться:

+, **-**, *****, **/** – знаки арифметичних операцій;

^ – зведення в ступінь і т. ін.

Ім'я змінної може бути будь-якою послідовністю букв, цифр і знаків підкреслення, що починається з букви. Букви верхнього й нижнього регістрів різняться в іменах змінних: *x* і *X* – це різні змінні.

Алгебраїчні вирази записуються, наприклад, так:

$$a^2 \left(2 + \frac{3}{\sqrt{b}} \right) = a^2 * (2 + 3 / \text{sqrt}(b)).$$

2 Команди «:=» і «:=». Відміна присвоювання

Команда «:=» присвоює значення змінним, вирази функціям і т. ін. Команда «=» просто використовується в рівняннях.

Оператор присвоювання має вигляд **ім'я змінної := вираз; .**

Система зберігає в пам'яті результати всіх команд усіх завантажених документів. Тому результати обчислень у поточному документі можуть виявитися залежними від визначень, зроблених в інших документах.

Для скасування операції присвоювання можна скористатися одним із наступних способів:

1) якщо необхідно скасувати присвоювання значень для всіх змінних, можна використовувати команду **restart**. Ця команда скасовує всі попередні визначення, скасовує залежність значень змінних від результатів роботи інших документів. Її варто застосовувати, коли попередня частина команд документа не є важливою. Тому цю команду рекомендується ставити першою;

2) для скасування присвоювання конкретної змінної можна скористатися оператором вигляду **ім'я змінної := ' ім'я змінної ';**

Приклад

> **x:=a+b; y:=x^2;**

$$\begin{aligned}x &:= a + b \\ y &:= (a + b)^2\end{aligned}$$

> **x:='x':**

> **x;y;**

$$\begin{aligned}& x \\ & (a + b)^2\end{aligned}$$

3 Функція користувача. Обчислення значень функції

Функція користувача задається оператором *Ім'я функції:=вираження ;*

Приклад

> **y:=x^2;**

$$y := x^2$$

Щоб обчислити значення функції при деякому значенні аргументу, необхідно аргументові привласнити значення і вказати ім'я функції:

> **x:=Pi;y;**

$$\begin{aligned}x &:= \pi \\ & \pi^2\end{aligned}$$

Якщо Maple записав результат в аналітичному виді, то для чисельного представлення потрібно використовувати оператор **evalf(y,k)**; де **y** – вираження, **k** – кількість значущих цифр:

> **evalf(y);**

9.869604404

> **evalf(y,4);**

9.872

4 Побудова графіка функції

Основна функція системи, призначена для побудови двовимірних графіків, має вигляд **plot(y, x=a..b, option)**.

Тут **y = f(x)** – функція, **x = a..b** – діапазон змін по горизонталі, **option** – додаткові функції.

Щоб побудувати на одному рисунку графіки декількох функцій, необхідно перелічити потрібні функції або їхні імена, уклавши їхню послідовність у квадратні дужки. Усі використовувані функції повинні залежати від аргументу, позначеного однаковим ім'ям.

За умовчанням графіки зображуються кольоровими лініями: червоний (**red**), зелений (**green**), жовтий (**yellow**), синій (**blue**) і т. д. Але при роздруківці рисунка в чорно-білому варіанті графіки стають не помітними. Тому, для наочності, різні криві зображують різними способами, при цьому колір указують чорний (**color = black**).

1 Лінії різної товщини задаються параметром **thickness**. Товщина лінії може дорівнювати 1 (за умовчанням), 2 або 3:

```
> y1:=x: y2:=x^2: y3:=x^3:  
> plot([y1,y2,y3],x=-1..1, thickness=[1,2,3],color=black);
```

Результат – на рисунку А.1.

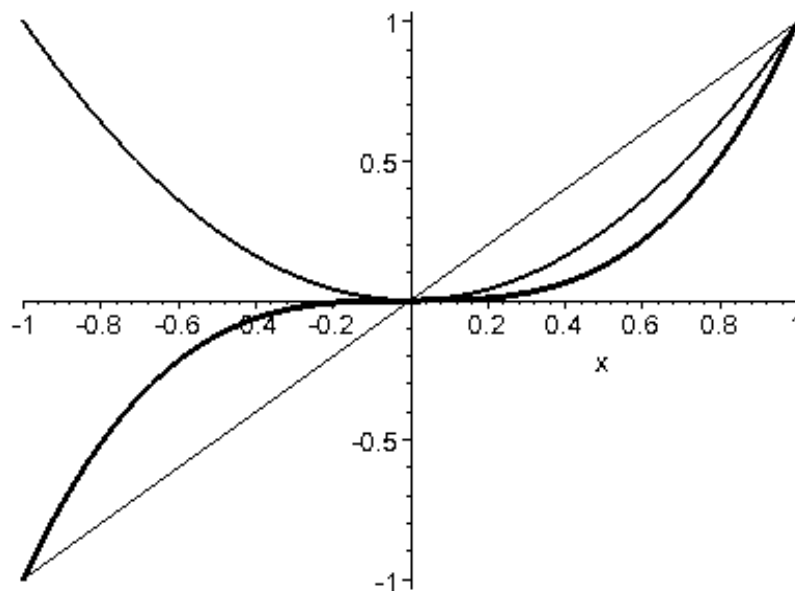


Рисунок А.1

2 Лінія задається точками – **style = point**. При цьому можна задавати вигляд символів, що зображують точки графіка – **symbol = s**. Може набувати одного з таких значень: **box** – квадратики, **cross** – хрестики (за умовчанням), **circle** – кружечки, **point** – точки і **diamond** – ромбики.

```
> plot([y1,y2,y3], x=-1..1, style=point, symbol=[cross,circle,diamond],  
color=black);
```

Результат – на рисунку А.2.

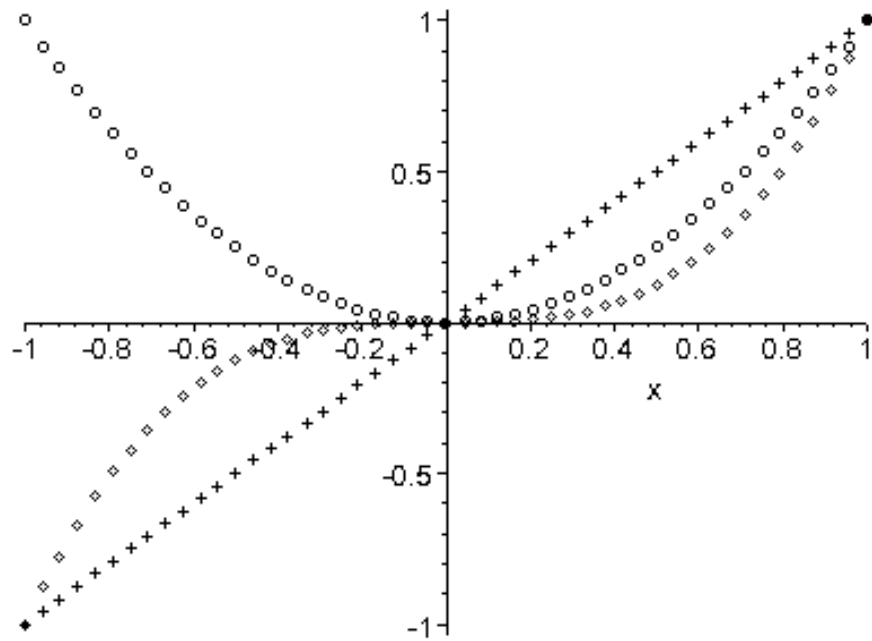


Рисунок А.2

3 Допускається комбінація стилів лінії:

```
>plot([y1,y2,y3], x=-1..1, style=[point,point,line],
symbol=[cross,circle], thickness=[1,1,2], color=black);
```

Результат – на рисунку А.3.

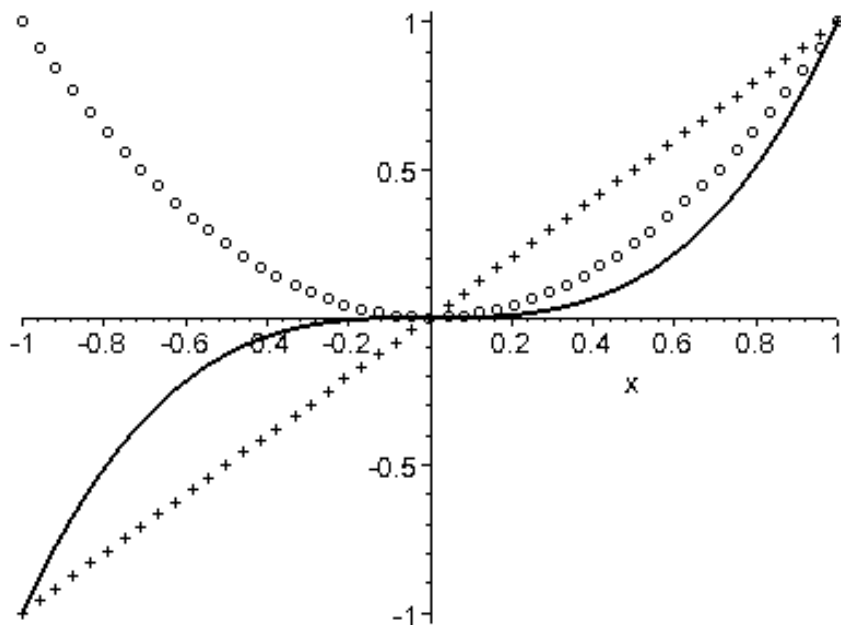


Рисунок А.3

Опції **thickness**, **color**, **style**, **symbol** команди **plot** можуть розташовуватися в довільному порядку.

5 Текст на графіку

1 Заголовок задається опцією **title** = 'текст'.

2 Команда **textplot([t_x, t_y, рядок], опції)**, що входить у пакет **plots**, дає можливість поміщати текст на графіку в заданій точці. Тут **t_x, t_y**, – координати точки, починаючи з якої розміщується рядок.

Як опції можна вказати:

Font = [назва _шрифту, стиль, розмір].

назва_шрифту: times, courier, helvetica, symbol;

стиль: roman, bold, italic, bolditalic;

розмір: розмір шрифту;

align = **v** – розміщення тексту на рисунку. Величина **v** набуває значення **below** (нижче), **right** (праворуч), **above** (вище), **left** (ліворуч) .

Приклади опцій:

align = below або align = {above, right}, font = [times, italic, 12].

6 Сполучення графіків і написів

Команда **display([pic_1, pic_2, ...])** поєднує графіки.

Команда виводить pic_1, pic_2, ... на одному рисунку в загальних координатах. Для застосування цієї команди потрібно привласнити змінним pic_1, pic_2, ... дії графічних команд.

Приклад

Одержати графіки функцій:

$$F1(x) = \sin(x)-1 \text{ і } F2(x) = 1+\cos(x).$$

Зробити напис на рисунках: $F1(x)$ и $F2(x)$.

> **with(plots):**

> **t1:=textplot([2,2,`F1(X)`], [2,-2,`F2(X)`]), font=[TIMES, BOLDITALIC, 12]):**

> **f1:= 1+cos(x): f2:= sin(x)-1:**

> **pic:=plot({f1,f2},x=-7..7, y=-3..3, title=` f1(x)=1+cos(x),
f2(x)=sin(x)-1`, color=black):**

> **display([t1,pic]):**

Результат – на рисунку А.4.

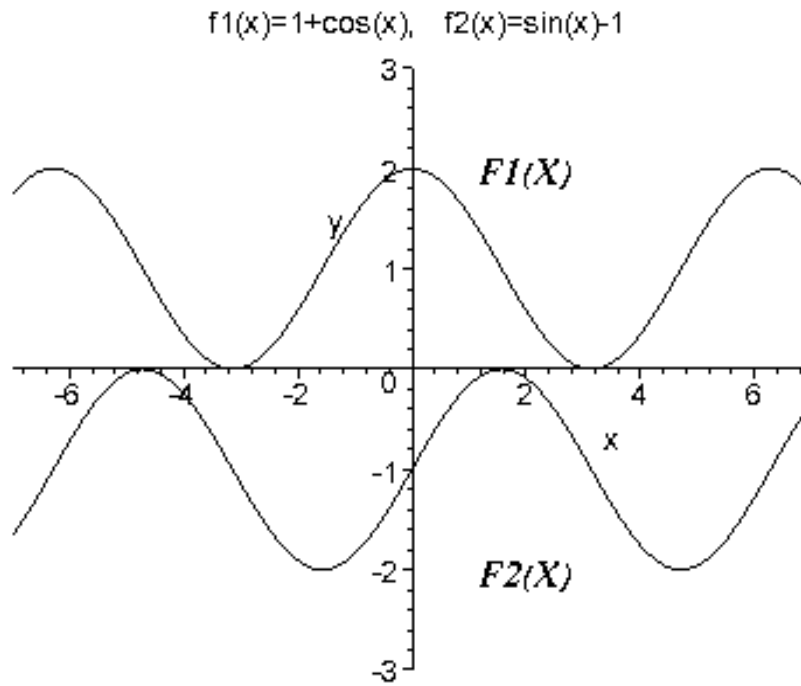


Рисунок А.4

7 Побудова графічного розв'язку системи нерівностей

Треба розв'язати графічно систему нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Команда очищення пам'яті:

> restart:

Вводимо нерівності:

```
> g1:=x1+3*x2>=6; g2:=7*x1+10*x2<=70; g3:=4*x1-5*x2>=-20;
    g1 := 6 ≤ x1 + 3 x2
    g2 := 7 x1 + 10 x2 ≤ 70
    g3 := -20 ≤ 4 x1 - 5 x2
```

Команди підключення бібліотек розширеної графіки:

> with(plots):

Команда побудови області розв'язків:

```
>inequal({g1,g2,g3, x1>=0, x2>=0}, x1=0..10, x2=0..10, optionsexcluded=(color=white ));
```

Результат – на рисунку А.5.

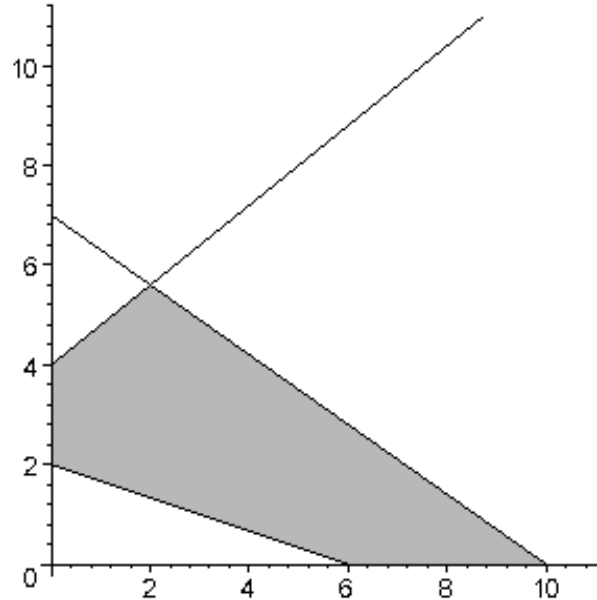


Рисунок А.5

Примітка. Для вірного масштабу треба виділити графік та натиснути кнопку **1:1** на панелі інструментів Maple.

8 Розв'язання рівнянь, нерівностей і систем рівнянь і нерівностей

Для розв'язання рівнянь, нерівностей і їхніх систем в аналітичному вигляді використовується функція **solve(eqn, var)**.

Тут **eqn** – рівняння, нерівність або система, **var** – імена невідомих змінних, значення яких необхідно знайти.

Якщо система не змогла знайти розв'язок, то просто видається пропозиція введення.

Якщо рівняння в **solve** укладено у фігурні дужки, то результат буде представлений теж у дужках .

Для розв'язання системи рівнянь щодо деякої кількості невідомих ці система і невідомі повинні бути записані у фігурних дужках .

```
> s:=solve({a*x-y=sqrt(3), 5*x+a*y=1}, {x, y});
```

$$s := \left\{ y = -\frac{-a + 5\sqrt{3}}{a^2 + 5}, x = \frac{a\sqrt{3} + 1}{a^2 + 5} \right\}$$

Для чисельного розв'язання систем рівнянь, коли не вдається знайти аналітичне розв'язання або з інших причин, можна використовувати функцію вигляду **fsolve(eqns, vars)**.

Для пошуку розв'язків в наближенні якої-небудь конкретної точки необхідно задавати інтервал пошуку, що включає в себе цю точку:

```
.>f:=sin(x+y)-exp(x)*y=0:g:=x^2-y=2:  
>fsolve({f,g},{x,y},{x=-1..1,y=-2..0});  
{y = -1.552838698, x = -.6687012050}
```

9 Знаходження максимуму (мінімуму) лінійної функції

Розв'язання задач лінійного програмування виконується бібліотекою програм «simplex». Підключається ця бібліотека командою **with(simplex)**.

Максимум або мінімум цільової функції шукаються командами:

```
maximize(f, sog додаткові умови);  
minimize(f, sog додаткові умови);
```

Тут **f** – цільова функція;

sog – система обмежень;

додаткові умови визначаються знаками змінних.

Нехай, наприклад, цільова функція залежить від трьох змінних x_1 , x_2 , x_3 . Якщо всі три змінні невід'ємні ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$), тоді команда на пошук максимуму дається так:

```
maximize(f, sog, NONNEGATIVE);
```

Якщо невід'ємні тільки дві змінні ($x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$), а x_2 може бути довільного знака, то команда на пошук максимуму дається так:

```
maximize(f, sog union {x1>=0, x3>=0});
```

Якщо всі три змінні можуть бути довільного знака, то команда на пошук максимуму дається так:

```
maximize(f, sog);
```

Для пошуку мінімуму команда є аналогічною за структурою.

10 Знаходження екстремумів функцій у пакеті Maple

Перед зверненням до функції обчислення екстремумів, необхідно загрузити бібліотеку командою **readlib(extrema)**.

Для пошуку екстремумів у пакеті Maple використовується функція вигляду

extrema(функція, обмеження, змінна, 's').

Результат – значення функції в точці екстремуму. Щоб визначити координати точки екстремуму, треба вказати параметр 's'.

Обов'язковий параметр *функція* повинен бути алгебраїчним виразом.

Обмеження можуть бути виразами, нерівностями, рівняннями. Якщо обмеження задано виразом, то цей вираз дорівнює нулю. Якщо обмеження відсутні, то цей параметр задається у вигляді пустої множини { }.

Параметр *змінна* повинен містити імена змінних, відносно яких шукається екстремум. Цим іменам не може бути присвоєно ніяких значень.

Якщо використовується параметр s (чи якась інша буква), то імена змінних повинні бути указані явно. У цьому випадку результат – множина точок екстремуму – буде присвоєно вказаній змінній s.

Приклади:

1 Знайти екстремум функції

$$f = x^2 - 1$$

Результат – значення функції

```
> readlib(extrema):  
> extrema(x^2-1, {}, x);
```

{-1}

Результат – значення функції та точка екстремуму

```
> readlib(extrema):  
> extrema(x^2-1, {}, x,q); q;
```

{-1}

{{x = 0}}

2 Знайти екстремум функції

$$f = x + y^2, \text{ якщо } y = x$$

Результат – значення функції

```
> readlib(extrema):  
> extrema(x+y^2, {y=x}, {x,y});
```

{-1/4}

Результат – значення функції та точка екстремуму

```
> readlib(extrema):  
> extrema(x+y^2, {y=x}, {x,y}, s);  
> s;
```

{-1/4}

{{x = -1/2, y = -1/2}}

ДОДАТОК Б

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ПАКЕТІ EXCEL FOR WINDOWS

Для того щоб у **Excel** можна було розв'язувати задачі на екстремум, необхідно підключити додаткову опцію **Пошук розв'язання**. Для цього в меню **Сервіс** обираємо команду **Надбудови** і позначаємо опцію **Пошук розв'язання**. Тепер ця команда з'явиться в меню **Сервіс**.

1 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 1

Розглянемо розв'язання задачі ЛП прикладу 2 з лабораторної роботи 1.

Нехай необхідно знайти (x_1, x_2) , при яких функція $F = 2x_1 + x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти такій системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для того щоб вирішити цю задачу за допомогою **Excel**, треба:

1 На робочому аркуші записати вихідні дані (рис. Б.1).

Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D	E	F
	1	x1	x2			
	2	Коефіцієнти цільової функції		2	1	
	3	Коефіцієнти системи обмежень			Права частина обмежень	Значення обмежень
	4		1	3	>=	6
	5		7	10	<=	70
	6		4	-5	>=	-20
	7					
	8	Значення змінних				
	9					
	10	Значення цільової функції				

Рисунок Б.1

2 Записати формули, за якими будуть обчислюватися цільова функція та система обмежень. Для цього треба помножити значення змінних на відповідні коефіцієнти та скласти добутки. Краще використовувати функцію **СУММПРОИЗВЕД** (рис. Б.2).

Для початку ці величини будуть дорівнювати 0.

3 Зробити активною клітинку, де записана формула обчислення значення цільової функції (C10) та виконати команду: **Сервіс – Пошук розв’язання**.

Стовпці робочого аркуша Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2	Коефіцієнти цільової функції	2	1			
3	Коефіцієнти системи обмежень			Права частина обмежень	Значення обмежень	
4		1	3	>=	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B4:C4)
5		7	10	<=	70	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B5:C5)
6		4	-5	>=	-20	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B6:C6)
7						
8	Значення змінних					
9						
10	Значення цільової функції	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$C\$8;B2:C2)				

Строки робочого аркуша Excel

Рисунок Б.2

4 З’явиться вікно **Пошук розв’язання**, у якому треба задати параметри обчислення:

- указати, що будемо шукати – мінімум або максимум функції;
- перейти до віконця **Змінюючи клітинки** і вказати адреси клітинок, де будуть знаходитися значення змінних (B8:C8);
- додати обмеження. Для цього клацнути по кнопці **Додати**, з’явиться вікно **Додати обмеження**. У віконці **Посилання на клітинку** вказати адресу клітинки, де знаходиться формула обчислення обмеження, обрати вид обмеження, у віконці **Обмеження** вказати адресу клітинки, де знаходиться права частина обмеження. Клацнути по кнопці **Додати** (рис. Б.3).

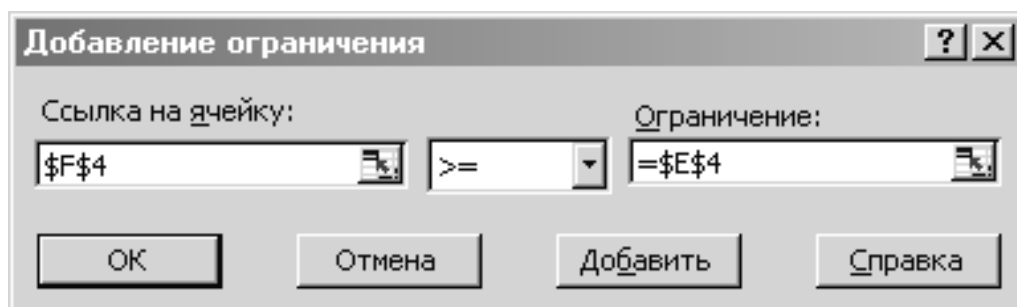


Рисунок Б.3

Виконати ці дії для кожного обмеження.

Загальний вигляд вікна повинен бути таким (рис. Б.4):

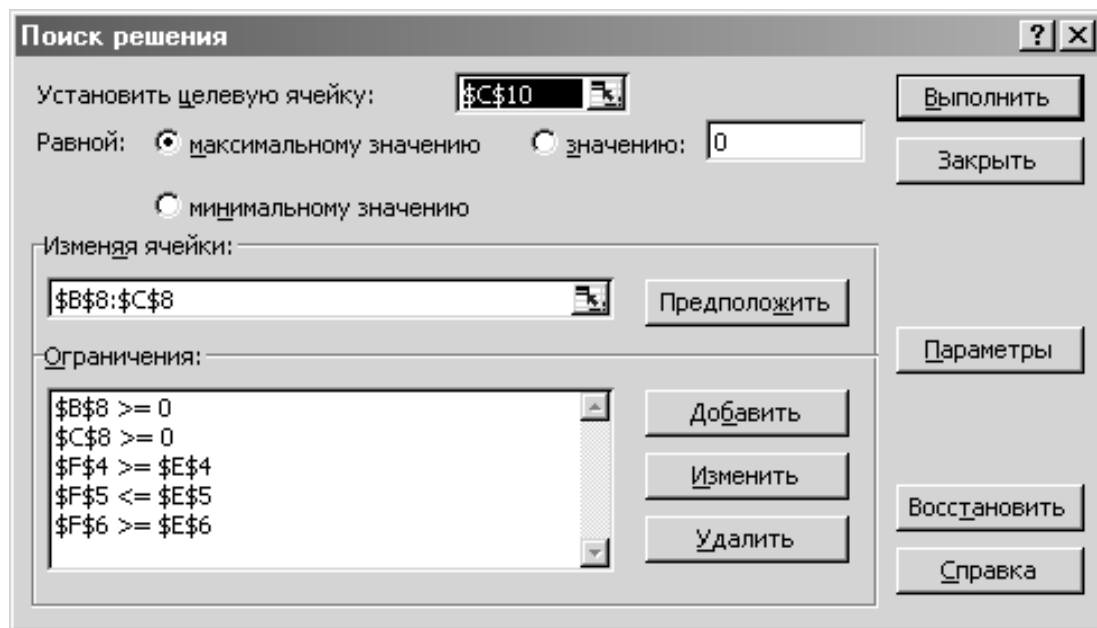


Рисунок Б.4

Клацнути по кнопці **Виконати**. Отримаємо такий результат (рис. Б.5):

Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D	E	F
	1		x1	x2		
	2	Коефіцієнти цільової функції		2	1	
	3	Коефіцієнти системи обмежень			Права частина обмежень	Значення обмежень
	4		1	3	>=	6
	5		7	10	<=	70
	6		4	-5	>=	-20
	7					
	8	Значення змінних		10	0	
	9					
	10	Значення цільової функції		20		

Рисунок Б.5

2 Графічне розв'язання задачі ЛП

У пакеті Excel немає можливості розв'язувати графічно систему нерівностей. Але можна побудувати графіки відповідних рівнянь.

Для цього треба виразити x_2 через x_1 :

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 2 - \frac{1}{3}x_1 \\
 x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\
 7x_1 + 10x_2 &\leq 70, \Rightarrow x_2 = 7 - \frac{7}{10}x_1 \\
 4x_1 - 5x_2 &\geq -20, \\
 x_2 &= 4 + \frac{4}{5}x_1
 \end{aligned}$$

Складемо таблицю, до якої введемо значення x_1 , а x_2 розрахуємо за формулами (достатньо дві точки):

x_1	0	10
(1)	2,00	-1,33
(2)	7	0
(3)	4	12

Потім будуємо діаграму. Треба виділити нашу маленьку таблицю.

Для побудови діаграми використовується команда **Вставка** → **Діаграма** чи кнопка **Майстер діаграм** на панелі інструментів **Стандартна**.

Крок 1. Обираємо тип діаграми – Точкова, з'єднана лініями. ДАЛІ.

Крок 2. Обираємо дані для діаграми. Якщо таблиця була виділена, дані беруться автоматично. ДАЛІ.

Крок 3. Задаємо параметри діаграми – Основні лінії сітки. ДАЛІ.

Крок 4. Розміщення діаграми – На цьому аркуші. ГОТОВО (рис. Б.6).

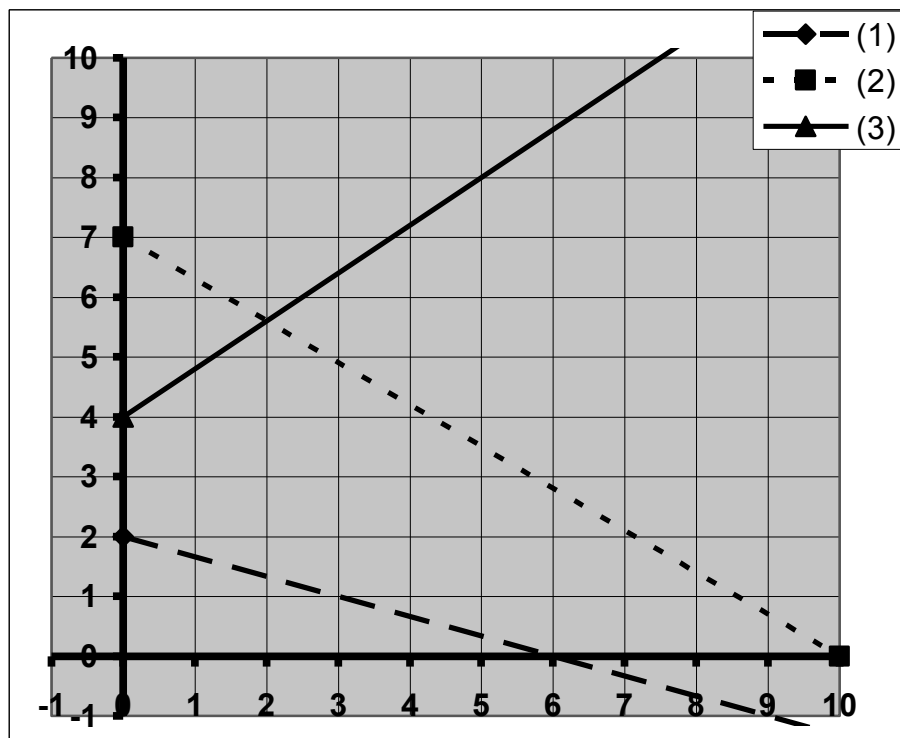


Рисунок Б.6

3 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 2

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовується три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції наведені в наступній таблиці Б.1.

Таблиця Б.1

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Праця, люд.-год.	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, годин	1	2	5	244
Прибуток, гр.од.	10	14	12	-

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток максимальний.

Розв'язання задачі (рис. Б.7, Б.8, Б.9, Б.10)

Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel	А	В	С	Д	Е	Ф
	1	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів	Затрати ресурсів
	2	Вид ресурсів	А	В	С	
	3	Труд, люд-год.	4	2	1	180
	4	Сировина, кг	3	1	3	210
	5	Устаткування, год.	1	2	5	244
	6	Прибуток, гр. од.	10	14	12	
7						
8	Кількість виробів					

Рисунок Б.7 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого листа Excel						
Рядки робочого аркуша Excel	А	В	С	Д	Е	Ф
	1	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів	Затрати ресурсів
	2	Вид ресурсів	А	В	С	
	3	Труд, люд-г	4	2	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B3:D3)
	4	Сировина, кг	3	1	3	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B4:D4)
	5	Устаткування, год.	1	2	5	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B5:D5)
	6	Прибуток, гр. од.	10	14	12	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B6:D6)
7						
8	Кількість виробів					

Рисунок Б.8 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

\$B\$8 >= 0
\$C\$8 >= 0
\$D\$8 >= 0
\$F\$3 <= \$E\$3
\$F\$4 <= \$E\$4
\$F\$5 <= \$E\$5

Рисунок Б.9 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D	E	F
	1	Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	2		A	B	C	
	3	Труд, люд-год	4	2	1	180
	4	Сировина, кг	3	1	3	210
	5	Устаткування, годин	1	2	5	244
	6	Прибуток, гр. од.	10	14	12	1340
	7					
	8	Кількість виробів	0	82	16	

Рисунок Б.10 – Робочий аркуш Excel з результатом

Розв'язання двоїстої задачі (рис. Б.11, Б.12, Б.13, Б.14)

$$G = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \text{ (min).}$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10,$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D	E	F
	1					
	2		4	3	1	10
	3		2	1	2	14
	4		1	3	5	12
	5					
	6	G	180	210	244	
	7					
	8					
	9		y1	y2	y3	

Рисунок Б.11 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel						
	A	B	C	D	E	F
1						
2		4	3	1	10	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B2:D2)
3		2	1	2	14	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B3:D3)
4		1	3	5	12	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B4:D4)
5						
6	G	180	210	244	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$D\$8;B6:D6)	
7						
8						
9		y1	y2	y3		

Рисунок Б.12 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку: 

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки: 

Ограничения:

-
-
-
-
-
-

Рисунок Б.13 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel						
	A	B	C	D	E	F
1						
2		4	3	1	10	24,25
3		2	1	2	14	14
4		1	3	5	12	12
5						
6	G	180	210	244	1340	
7						
8		5,75	0	1,25		
9		y1	y2	y3		

Рисунок Б.14 – Робочий аркуш Excel з результатом

4 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 3

При складанні добового раціону годівлі худоби можна використовувати свіже сіно (не більш 50 кг) і силос (не більш 85 кг). У таблиці Б.2 наведені дані про вміст зазначених компонентів у 1 кг кожного продукту харчування, поживність раціону (мінімальні норми) і вартість продуктів.

Таблиця Б.2

Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону
	Свіже сіно	Силос	
Кормові одиниці	0,5	0,5	30 одиниць
Білок, г/кг	40	10	1 кг
Кальцій, г/кг	1,25	2,5	100 г
Фосфор, г/кг	2	1	80 г
Вартість, гр. од.	1,2	0,8	-

Скласти раціон, що задовольняє вищевикладеним вимогам і є мінімальним за вартістю.

Розв'язання задачі (рис. Б.15, Б.16, Б.17, Б.18)

Стовпці робочого аркуша Excel					
Рядки робочого аркуша Excel	А	В	С	Д	Е
	1	Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону
	2		Свіже сіно	Силос	
	3	Кормові одиниці	0,5	0,5	30
	4	Білок, г/кг	0,04	0,01	1
	5	Кальцій, г/кг	0,00125	0,0025	0,1
	6	Фосфор, г/кг	0,002	0,001	0,08
	7	Вартість, гр. од.	1,2	0,8	
	8				
	9	Раціон складає			
	10	Не більше	50	85	

Рисунок Б.15 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel					
Рядки робочого аркуша Excel	А	В	С	Д	Е
	1	Поживні речовини	Продукт		Поживність раціону складає
	2		Свіже сіно	Силос	
	3	Кормові одиниці	0,5	0,5	30
	4	Білок, г/кг	0,04	0,01	1
	5	Кальцій, г/кг	0,00125	0,0025	0,1
	6	Фосфор, г/кг	0,002	0,001	0,08
	7	Вартість, гр. од.	1,2	0,8	
	8				
	9	Раціон складає			
	10	Не більше	50	85	

Рисунок Б.16 – Робочий аркуш Excel з формулами

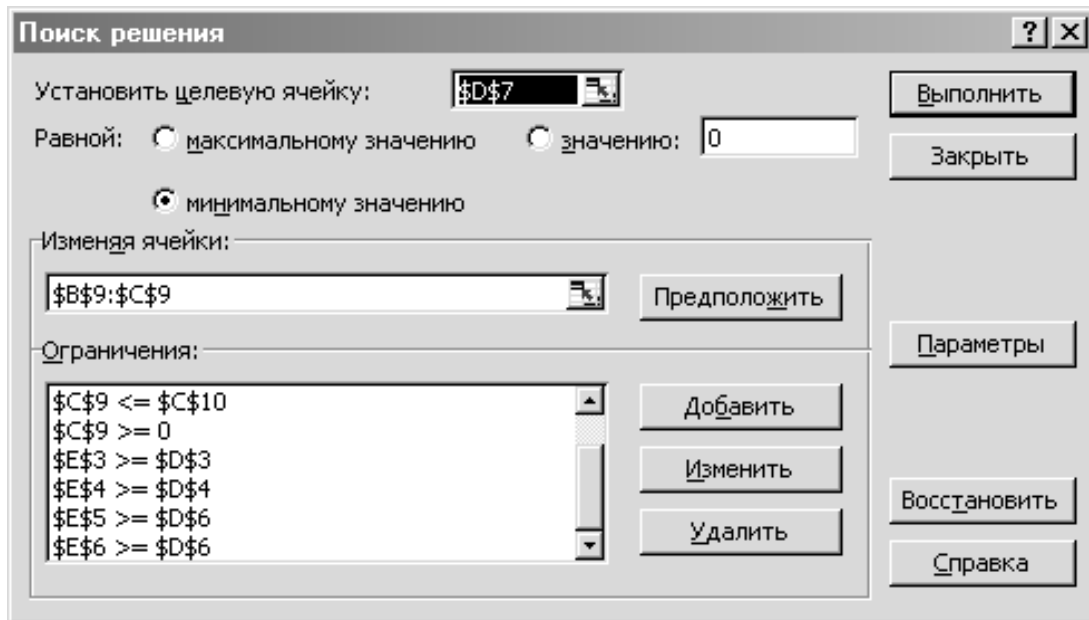


Рисунок Б.17 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel					
	A	B	C	D	E
1	Поживні	Продукт		Поживність	Поживність
2	речовини	Свіже сіно	Силос	раціону	раціону складає
3	Кормові одиниці	0,5	0,5	30	29,99999989
4	Білок, г/кг	0,04	0,01	1	1,200000004
5	Кальцій, г/кг	0,00125	0,0025	0,1	0,124999999
6	Фосфор, г/кг	0,002	0,001	0,08	0,08
7	Вартість, гр. од.	1,2	0,8	55,99999991	
8					
9	Рацион складає	20	39,99999996		
10	Не більше	50	85		

Рисунок Б.18 - Робочий лист Excel з результатом

Розв'язання двоїстої задачі (рис. Б.19, Б.20, Б.21, Б.22)

$$\begin{aligned}
 G &= 30y_1 + y_2 + 0,1y_3 + 0,08y_4 - 50y_5 - 85y_6 \text{ (max)}, \\
 0,5y_1 + 0,04y_2 + 0,00125y_3 + 0,002y_4 - y_5 &\leq 1,2, \\
 0,5y_1 + 0,01y_2 + 0,0025y_3 + 0,001y_4 - y_6 &\leq 0,8, \\
 y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0, y_5 \geq 0, y_6 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Стовпці робочого аркуша Excel									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0,5	0,04	0,00125	0,002	-1		1,2	
2		0,5	0,01	0,0025	0,001		-1	0,8	
3									
4									
5	G	30	1	0,1	0,08	-50	-85		
6									
7									
8									
9		y1	y2	y3	y4	y5	y6		

Рисунок Б.19 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0,5	0,04	0,00125	0,002	-1		1,2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$G\$8;B1:G1)
2		0,5	0,01	0,0025	0,001		-1	0,8	=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$G\$8;B2:G2)
3									
4									
5	G	30	1	0,1	0,08	-50	-85		=СУММПРОИЗВ(\$B\$8:\$G\$8;B5:G5)
6									
7									
8									
9		y1	y2	y3	y4	y5	y6		

Рисунок Б.20 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- \$D\$8 >= 0
- \$E\$8 >= 0
- \$F\$8 >= 0
- \$G\$8 >= 0
- \$I\$1 <= \$H\$1
- \$I\$2 <= \$H\$2

Рисунок Б.21 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0,5	0,04	0,00125	0,002	-1		1,2	1,2
2		0,5	0,01	0,0025	0,001		-1	0,8	0,8
3									
4									
5	G	30	1	0,1	0,08	-50	-85	56	
6									
7									
8		0,8	0	0	400,0000157	0	0		
9		y1	y2	y3	y4	y5	y6		

Рисунок Б.22 - Робочий лист Excel з результатом

5 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 4

Розв'язання замкнутої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці Б.3.

Таблиця Б.3

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	100	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	150	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Розв'язання задачі (рис. Б.23, Б.24, Б.25, Б.26)

Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel	А	В	С	Д
	1	Пункти відправлення	Пункти призначення	
	2		В ₁	В ₂
	3	A ₁	4	2
	4	A ₂	3	6
	5	Потреби	120	130
	6			
	7	Відповідь		
	8	Вартість перевезень:		
	9			
	10	Пункти відправлення	Пункти призначення	
	11		В ₁	В ₂
	12	A ₁		
	13	A ₂		
	14	Потреби		

Рисунок Б.23 – Робочий лист Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel	А	В	С	Д
	1	Пункти відправлення	Пункти призначення	
	2		В ₁	В ₂
	3	A ₁	4	2
	4	A ₂	3	6
	5	Потреби	120	130
	6			
	7	Відповідь		
	8	Вартість перевезень:	=СУММПРОИЗВ(С3:Д4;С12:Д13)	
	9			
	10	Пункти відправлення	Пункти призначення	
	11		В ₁	В ₂
	12	A ₁	=СУММ(С12:Д12)	
	13	A ₂	=СУММ(С13:Д13)	
	14	Потреби	=СУММ(С12:С13)	=СУММ(Д12:Д13)

Рисунок Б.24 – Робочий аркуш Excel з формулами

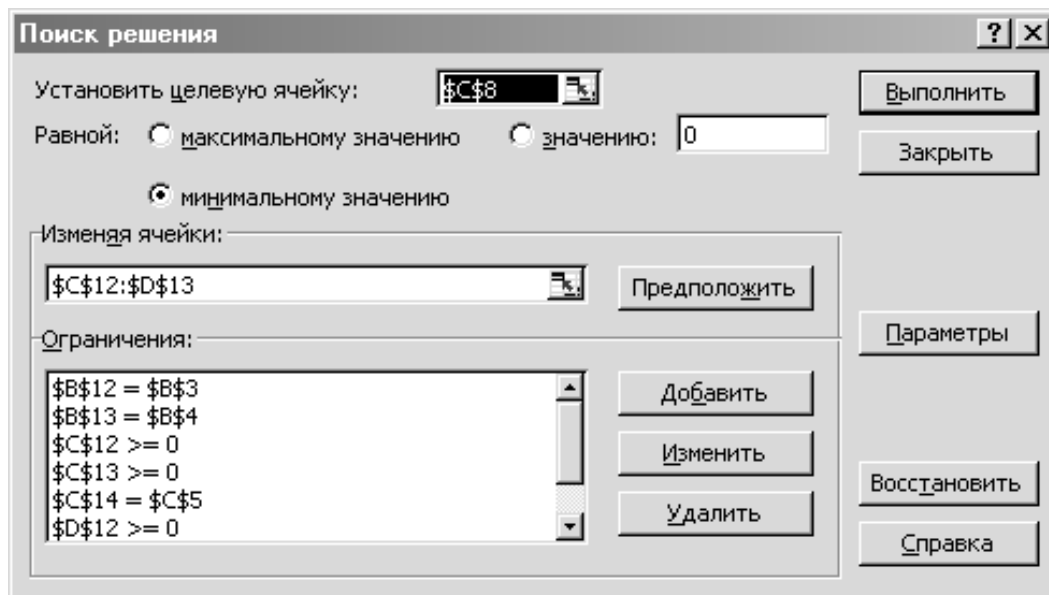


Рисунок Б.25 – Вікно Пошук розв'язку

Столпці робочого аркуша Excel

Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D
	1	Пункти відправлення	Пункти призначення	
	2		B ₁	B ₂
	3	A ₁	100	4
	4	A ₂	150	3
	5	Потреби	120	130
	6			
	7		Відповідь	
	8	Вартість перевезень:	740	
	9			
	10	Пункти відправлення	Пункти призначення	
	11		B ₁	B ₂
	12	A ₁	100	0
	13	A ₂	150	120
	14	Потреби	120	130

Рисунок Б.26 – Робочий аркуш Excel з результатом

Розв'язання двоїстої задачі (рис. Б.27, Б.28, Б.29, Б.30)

$$G = 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + y_4 \leq 2, \\ y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_2 + y_4 \leq 6. \end{cases}$$

		Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D	E	F	G
	1		1	0	1	0	4	
	2		1	0	0	1	2	
	3		0	1	1	0	3	
	4		0	1	0	1	6	
	5							
	6	G	100	150	120	130		
	7							
	8		y1	y2	y3	y4		
	9							

Рисунок Б.27 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

		Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D	E	F	G
	1		1	0	1	0	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B1:E1)
	2		1	0	0	1	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B2:E2)
	3		0	1	1	0	3	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B3:E3)
	4		0	1	0	1	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B4:E4)
	5							
	6	G	100	150	120	130	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B6:E6)	
	7							
	8		y1	y2	y3	y4		
	9							

Рисунок Б.28 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

-
-
-
-

Buttons: Выполнить, Закреть, Параметры, Добавить, Изменить, Удалить, Восстановить, Справка

Рисунок Б.29 – Вікно Пошук розв'язку

Рядки робочого ар- куша Excel		Стовпці робочого аркуша Excel						
		A	B	C	D	E	F	G
		1	1	0	1	0	4	-1
		2	1	0	0	1	2	2
		3	0	1	1	0	3	3
		4	0	1	0	1	6	6
		5						
		6	G	100	150	120	130	740
		7		-0,76812	3,231884058	-0,2318841	2,768116	
		8		y1	y2	y3	y4	
9								

Рисунок Б.30 – Робочий аркуш Excel з результатом

Розв'язання відкритої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці Б.4.

Таблиця Б.4

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B ₁		B ₂	
A ₁	120	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	180	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Розв'язання задачі (рис. Б.31, Б.32, Б.33, Б.34)

		Стовпці робочого аркуша Excel			
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D
	1	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	2			B ₁	B ₂
	3	A ₁	120	4	2
	4	A ₂	180	3	6
	5	Потреби		120	130
	6				
	7		Відповідь		
	8	Вартість перевезень:			
	9				
	10	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
	11			B ₁	B ₂
	12	A ₁			
	13	A ₂			
	14	Потреби			

Рисунок Б.31 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D
	1		Пункти призначення	
	2	Пункти відправлення	Запаси	
	3	A ₁	120	4
	4	A ₂	180	3
	5	Потреби	120	130
	6			
	7		Відповідь	
	8	Вартість перевезень:	=СУММПРОИЗВ(C3:D4;C12:D13)	
	9			
	10		Пункти призначення	
	11	Пункти відправлення	Запаси	
	12	A ₁	=СУММ(C12:D12)	
	13	A ₂	=СУММ(C13:D13)	
	14	Потреби	=СУММ(C12:C13)	=СУММ(D12:D13)

Рисунок Б.32 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☐ значению:

☒ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- \$B\$12 <= \$B\$3
- \$B\$13 <= \$B\$4
- \$C\$12 >= 0
- \$C\$13 >= 0
- \$C\$14 = \$C\$5
- \$D\$12 >= 0

Рисунок Б.33 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D
	1		Пункти призначення	
	2	Пункти відправлення	Запаси	
	3	A ₁	120	4
	4	A ₂	180	3
	5	Потреби	120	130
	6			
	7		Відповідь	
	8	Вартість перевезень:	660	
	9			
	10		Пункти призначення	
	11	Пункти відправлення	Запаси	
	12	A ₁	120	0
	13	A ₂	130	10
	14	Потреби	120	130

Рисунок Б.34 – Робочий аркуш Excel з результатом

Розв'язання двоїстої задачі (рис. Б.35, Б.36, Б.37, Б.38)

$$G = -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 4, \\ -y_1 + y_4 \leq 2, \\ -y_2 + y_3 \leq 3, \\ -y_2 + y_4 \leq 6, \end{cases} \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Стовпці робочого аркуша Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1		-1	0	1	0	4	
2		-1	0	0	1	2	
3		0	-1	1	0	3	
4		0	-1	0	1	6	
5							
6	G	-120	-180	120	130		
7							
8		y1	y2	y3	y4		

Рядки робочого аркуша Excel

Рисунок Б.35 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1		-1	0	1	0	4	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B1:E1)
2		-1	0	0	1	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B2:E2)
3		0	-1	1	0	3	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B3:E3)
4		0	-1	0	1	6	=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B4:E4)
5							
6	G	-120	-180	120	130		=СУММПРОИЗВ(\$B\$7:\$E\$7;B6:E6)
7							
8		y1	y2	y3	y4		

Рядки робочого аркуша Excel

Рисунок Б.36 – Робочий аркуш Excel з формулами

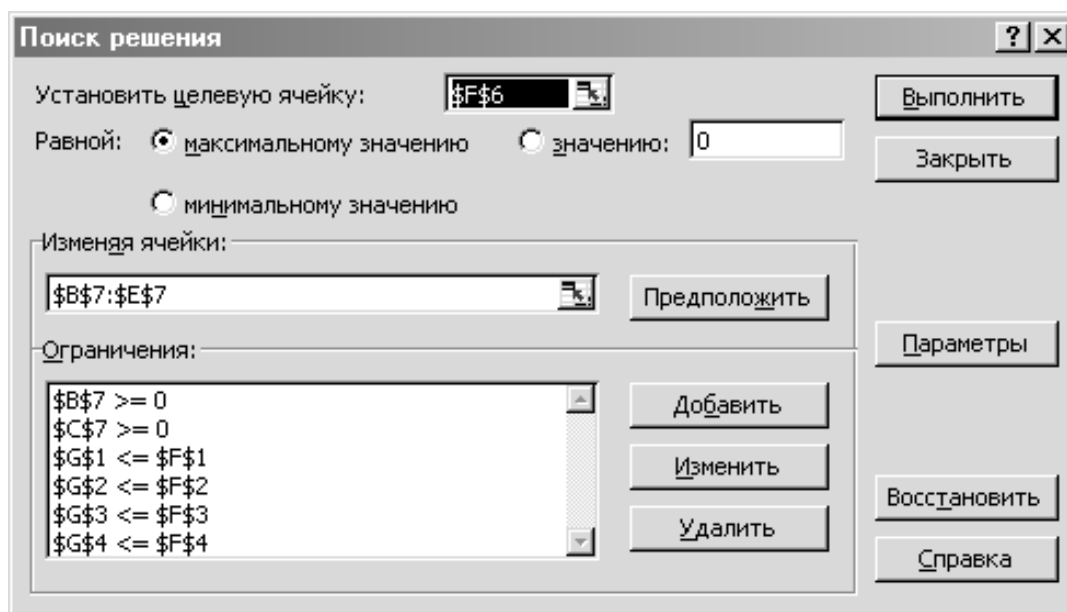


Рисунок Б.37 – Вікно Пошук розв'язку

		Стовпці робочого аркуша Excel						
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D	E	F	G
	1		-1	0	1	0	4	-1
	2		-1	0	0	1	2	2
	3		0	-1	1	0	3	3
	4		0	-1	0	1	6	6
	5							
	6	G	-120	-180	120	130	660	
	7		4	0	3	6		
	8		y1	y2	y3	y4		

Рисунок Б.38 – Робочий аркуш Excel з результатом

6 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 5

Задача 1 (рис. Б.39, Б.40, Б.41, Б.42)

$$F = 7,62x_1 + 6,45x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,2x_2 \leq 400 \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 \leq 200 \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0 \\ x_1 \leq 350 \\ x_2 \leq 280 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

		Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D	E
	1		0,01	0,2	400	
	2		0,22	0,15	200	
	3		1	-0,75	0	
	4		1	0	350	
	5		0	1	280	
	6					
	7	F=	7,62	6,45		
	8					
	9		x1	x2		
	10					

Рисунок Б.39 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel					
	A	B	C	D	E
1		0,01	0,2	400	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B1:C1)
2		0,22	0,15	200	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B2:C2)
3		1	-0,75	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B3:C3)
4		1	0	350	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B4:C4)
5		0	1	280	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B5:C5)
6					
7	F=	7,62	6,45	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B7:C7)	
8					
9		x1	x2		
10					

Рисунок Б.40 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению: ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- \$B\$10 >= 0
- \$C\$10 >= 0
- \$E\$1 <= \$D\$1
- \$E\$2 <= \$D\$2
- \$E\$3 = \$D\$3
- \$E\$4 <= \$D\$4

Рисунок Б.41 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel					
	A	B	C	D	E
1		0,01	0,2	400	58,1
2		0,22	0,15	200	88,2
3		1	-0,75	0	0
4		1	0	350	210
5		0	1	280	280
6					
7	F=	7,62	6,45	3406,2	
8					
9		x1	x2		
10		210	280		

Рисунок Б.42 – Робочий аркуш Excel з результатом

Задача 2 (рис. Б.43, Б.44, Б.45, Б.46)

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50 \\ x_1 \leq 350 \\ x_2 \leq 280 \\ 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0 \\ -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

		Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D	E
	1		-0,22	0,85	50	
	2		1	0	350	
	3		0	1	280	
	4		0,9	-0,2	0	
	5		-0,22	0,85	0	
	6					
	7	F=	5,66	4,35		
	8					
	9		x1	x2		
	10					

Рисунок Б.43 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

		Стовпці робочого аркуша Excel				
Рядки робочого аркуша Excel		A	B	C	D	E
	1		-0,22	0,85	50	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B1:C1)
	2		1	0	350	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B2:C2)
	3		0	1	280	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B3:C3)
	4		0,9	-0,2	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B4:C4)
	5		-0,22	0,85	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B5:C5)
	6					
	7	F=	5,66	4,35		=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$C\$10;B7:C7)
	8					
	9		x1	x2		
	10					

Рисунок Б.20 – Робочий аркуш Excel з формулами

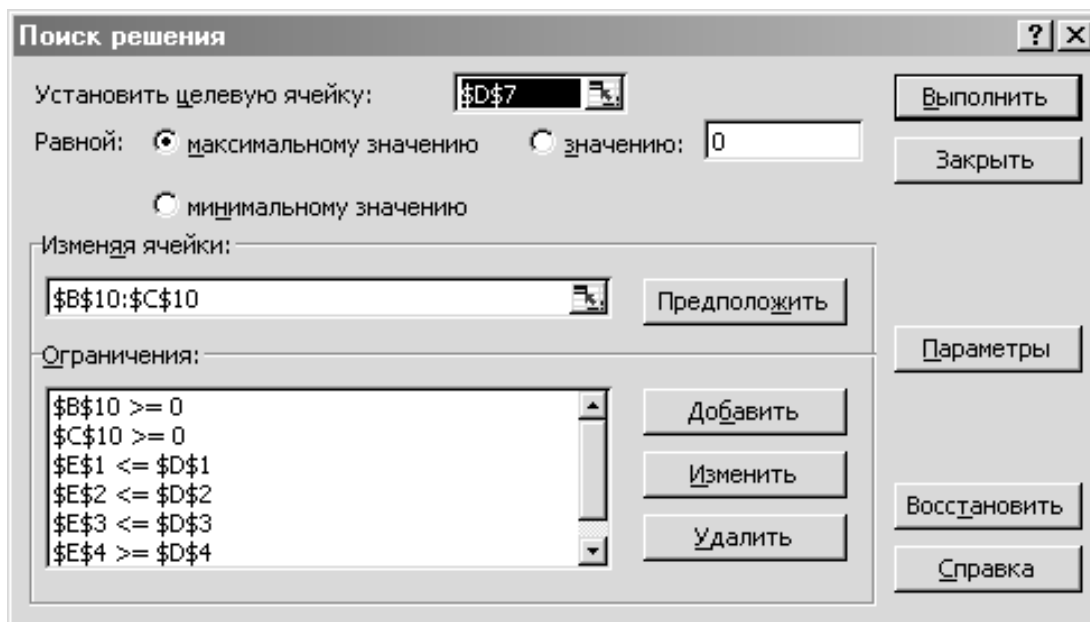


Рисунок Б.44 – Вікно Пошук розв'язку

Столпці робочого аркуша Excel					
Рядки робочого аркуша Excel	A	B	C	D	E
	1		-0,22	0,85	50
	2		1	0	350
	3		0	1	280
	4		0,9	-0,2	0
	5		-0,22	0,85	0
	6				
	7	F=	5,66	4,35	2630,941
	8				
	9		x1	x2	
	10		350	149,4118	

Рисунок Б.45 – Робочий аркуш Excel з результатом

7 Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи 6

Знайти максимальне значення функції F на області, заданій системою обмежень (рис. Б.46, Б.47, Б.48, Б.49).

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \quad (\max), \\ x_1 + 4x_2 \leq 52, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64. \end{array} \right.$$

Стовпці робочого аркуша Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2						
3						
4	F=	9	2	-1	-1	
5						
6		1	4	52		
7		1	-1	2		
8		7	3	64		

Рисунок Б.46 – Робочий аркуш Excel з вихідними даними

Стовпці робочого аркуша Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2		7	5			
3						
4	F=	9	2	-1	-1	=B4*B2+C4*C2+D4*B2+E4*C2*C2
5						
6		1	4	52		=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B6:C6)
7		1	-1	2		=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B7:C7)
8		7	3	64		=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$C\$2;B8:C8)
9						

Рисунок Б.47 – Робочий аркуш Excel з формулами

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рисунок Б.48 – Вікно Пошук розв'язку

Стовпці робочого аркуша Excel						
	A	B	C	D	E	F
1		x1	x2			
2		7	5			
3						
4	F=	9	2	-1	-1	-1
5						
6		1	4	52		27
7		1	-1	2		2
8		7	3	64		64
9						

Рисунок Б.49 – Робочий аркуш Excel з результатом

ДОДАТОК В

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАКЕТА MATHCAD

1 Загальні положення пакета MathCad

Програма **MathCad** є універсальною математичною системою, що дозволяє здійснювати будь-які обчислення в їхньому звичному алгебраїчному вигляді. Вона містить текстовий, формульний і графічний редактори, цілком сумісні з операційною системою **Windows**.

Запуск **MathCad** здійснюється за допомогою головного меню Windows або будь-яким іншим способом, що дозволяє активувати даний програмний продукт. Вікно пакета (рис. В.1) містить рядок заголовка (назва програми й ім'я документа) (1), рядок меню, що керує (2). Умовимося, що нумерація рядків виконана зверху вниз, а позицій у рядку – зліва направо. Основні пункти меню дублюються піктограмами (кнопками) керування (3-й, 4-й рядки).

Опції головного меню (рис. В.1):

File / Файл – робота з файлами (2–1);

Edit / Виправлення – редагування (2–2);

View / Вид – зміна вигляду робочого документа і панелей керування (2–3);

Insert / Вставка – вставка різних об'єктів і тексту у відкритий документ (2–4);

Format / Форматування – містить команди форматування відкритого документа (2–5);

Math / Математика – керування процесом обчислень (2–6);

Symbolics / Символи – вибір операцій для аналітичних розрахунків (2–7);

Window / Вікно – керування вікнами (2–8);

Help / Довідка – виклик довідкової системи (2–9).

Третій рядок у вікні програми – кнопки шаблонів математичних знаків – палітр, які можна переміщувати:

Calculator Toolbar / Панель інструментів арифметичних операцій (3–1);

Graph Toolbar / Панель інструментів графіків (3–2);

Vector and Matrix Toolbar / Панель інструментів векторів і матриць (3–3);

Evaluation Toolbar / Панель інструментів деяких знаків (3–4);

Calculus Toolbar / Панель інструментів математичного аналізу (3–5);

Boolean Toolbar / Панель інструментів математичної логіки (3–6);

Programming Toolbar / Панель інструментів програмування (3–7);

Greek symbol Toolbar / Панель символів грецького алфавіту (3–8);

Symbolic Keyword Toolbar / Панель символічних операторів (3–9).

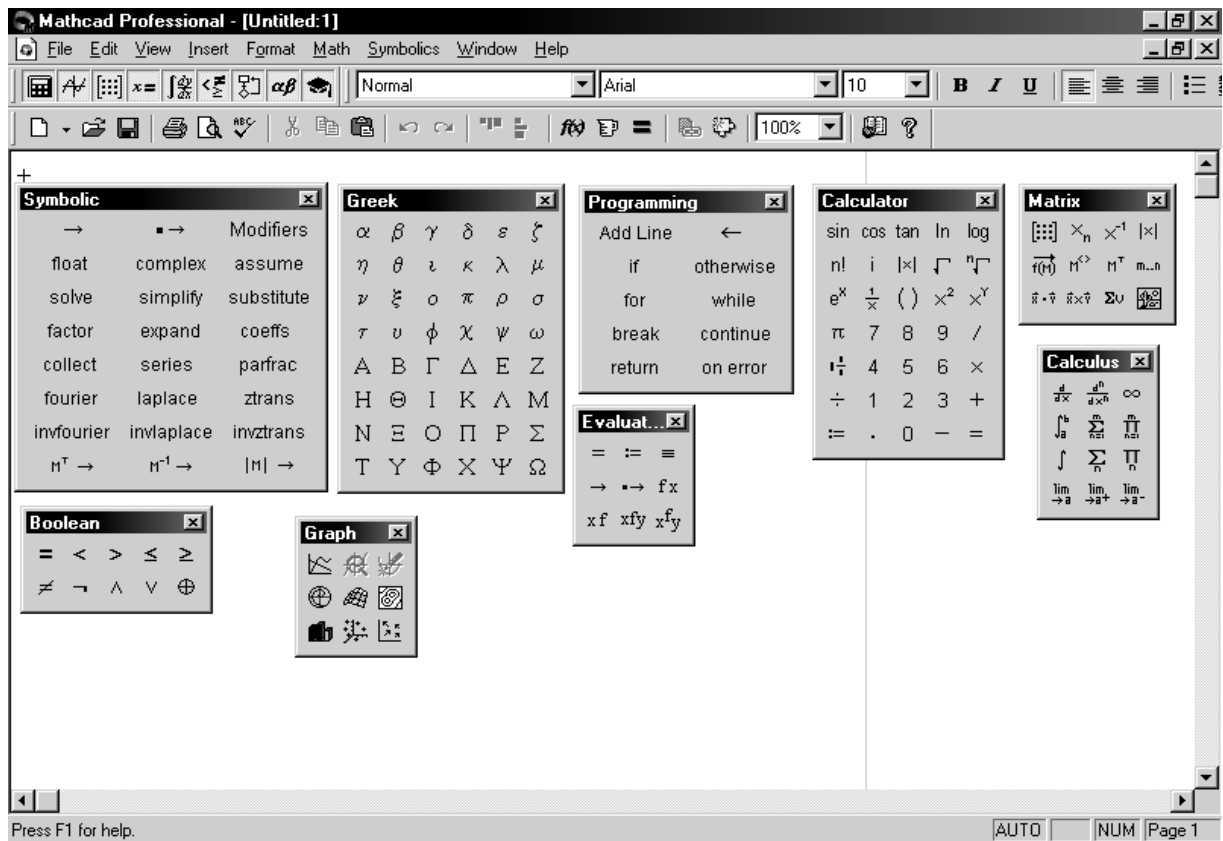


Рисунок В.1 – Вікно програми MathCad Professional 2001

Щоб перенести символ палітри в місце, позначене курсором, потрібно клацнути по обраній палітрі, розкрити її і клацнути по обраному знаку. Крім вищезгаданого, даний рядок містить піктограми керування шрифтами і положенням тексту в текстовій області.

Четвертий рядок – панель інструментів, що включає кілька груп піктограм.

Перша група – операції з файлами:

New / Новий (4–1);

Open / Відкрити (4–2);

Save / Зберегти (4–3);

Print / Друкувати (4–4);

Print Preview / Попередній перегляд (4–5);

Check Spelling / Перевірка орфографії (4–6).

Друга група – редагування:

Cut / Вирізати (перенести в буфер) (4–7);

Copy / Копіювати (в буфер) (4–8);

Paste / Вставити (перенести вміст буфера на місце вставки) (4–9);

Undo (Redo) / Скасування (Повтор) останньої операції (4–10, 11);

Align Across (Align Down) / Піктограми вирівнювання блоків (4–12, 13).

Далі йдуть:

Insert Function / Вставка функцій (зі списку в діалоговому вікні) (4–14);

Insert Unit / Вставка розмірних одиниць (4–15);

Calculate / Обчислити виділене вираження (4–16);

Insert Giperlink / Вставка гіперпосилань (4–17);

Insert Component / Вставка компонентів (4–18);

Zoom / Масштаб екрана (4–19);

Resource Center / Центр навчання (4–20);

Help / Допомога (4–21).

Внизу екрана розташований рядок стану програми.

Довідкова система **MathCad** включає: спливаючу підказку при зупинці покажчика на кожній із піктограм; розділ *Resource Center* / *Центр навчання* (4–20) – довідник з математичних розрахунків із прикладами застосування і самовчитель; розділи допомоги *Help* / *Допомога* (4–21) – надання допомоги з усіх розділів програми. Комбінація клавіш *Shift+F1* при покажчику, установленому на досліджуваному елементі, дозволяє відкрити контекстну довідку про нього.

Варто враховувати, що послідовність відображуваних на екрані піктограм може бути змінена користувачем за своїм розсудом.

2 Прості арифметичні обчислення

Клацання у будь-якому місці документа викликає появу курсора у формі хрестика, що вказує місце введення виразу. Для визначення змінної після введення її імені ставиться символ «:=» (оператор присвоювання) і вказується значення, що присвоюється. Ліворуч від оператора присвоювання може стояти ім'я простої змінної (**X**), індексованої змінної (**X_i** чи **X_{ij}**), матриці (**M**), змінної з верхнім індексом (**Xⁱ**) чи функції **F(x, y, z)**.

Аргументом функцій можуть бути скаляри, вектори, матриці. Імена функцій, задані користувачем, варто набирати скрізь одним шрифтом. Імена вбудованих функцій не чуттєві до шрифтів. Їх можна вдруковувати чи вибирати зі списку – кнопка (4–14) **f(x)** (*Insert Function* / *Вставка функції*).

У якості десяткової коми використовується крапка. Результат обчислення виводиться на екран після набору символу «:=».

Команда *Math - Automatic Calculation* / *Математика - Автоматичне обчислення* вмикає / вимикає автоматичний режим обчислення результату після набору знака рівності. При відключеному режимі автоматичного обчислення для перерахування потрібно натиснути клавішу **F9**. Переривання обчислень здійснюється кнопкою **ESC** чи клацанням по знаку рівняння, або повторне натискання клавіші **F9** продовжить обчислення.

При виявленні помилки варто перейти до ручного режиму й переглянути попередні вирази, що можуть бути її причиною. Для видалення виразу, таблиці, графіка та ін. необхідно спочатку виділити об'єкт, а потім, після появи рамки навколо об'єкта, використовувати опцію контекстного меню – *Cut* / *Вирізати* або опцію меню *Edit – Delete* / *Редагувати - Видалити*. Копіювання об'єкта в буфер обміну відбувається аналогічно використанню опції *Copy* / *Копіювати*.

Оператори, цифри, знаки обираються з відповідних палітр (пиктограм) рядка 3–9 (рис. В.1) або вводяться з клавіатури. Вихід із-під знака оператора здійснюється переміщенням курсора за область цього оператора або натисканням клавіші **Enter**. Імена змінних повинні бути визначені раніше оператора функції. Вираз, що містить знак «:=», впливає на документ нижче і праворуч від себе. Команда *Edit - Select All / Виправлення - Виділити все* чи протягання курсора при натиснутій лівій кнопці маніпулятора «миша» через документ дає можливість перегляду виділених областей, що не повинні перетинатися.

Визначені змінні (які мають прийняті значення за умовчанням) можна перевизначити: *Math – Options / Математика – Параметри*.

За умовчанням установлені:

∞ – нескінченність, набуває значення 10^{307} ;

e – число e , набуває значення 2,71828182845905;

π – число π , набуває значення 3,14159265358979;

i – уявна одиниця, набуває значення $1i$;

j – уявна одиниця, набуває значення $1j$;

% – відсоток, набуває значення 0.01 (наприклад, 20·30 % = 6);

TOL – припустима похибка обчислень, набуває значення 0,001;

ORIGIN – завдання індексу 1-го елемента матриці (вектора), набуває значення 0.

Приклад В.1

Розрахувати значення арифметичного виразу в точці $x = 3$ (вигляд документа в MathCad).

$$x := 3$$

$$\sqrt{\frac{4}{e^x}} - \coth(x)^3 \cdot \cos(|x \cdot \sin(x^2) - \ln(x)|) = -0.559$$

3 Табулювання функцій

Для обчислення значень функції в деякому діапазоні зміни аргументу спочатку необхідно визначити цей дискретний аргумент.

Наприклад, якщо потрібно табулювати функцію $y(t) = \sin(t) - \cos(t)$ при зміні аргументу t в інтервалі $[-2;2]$ із кроком **0,5**, необхідно виконати такі дії:

- 1 Задати діапазон зміни змінної у вигляді:

$$t := -2, -1.5.. 2$$

де **-2** – ліва межа інтервалу; **-1,5** – сума лівої межі інтервалу і кроку зміни змінної $[-2 + 0,5 = -1,5]$; **..** – оператор, що встановлюється за допомогою піктограми *Vector and Matrix Toolbar - Range Variable / Операції з векторами і матрицями / Діапазон змінної* (кнопка ); **2** – права межа інтервалу.

2 Задати функцію **y (t):** = sin (t) – cos (t).

3 Увести **t** = (на екран буде виведена таблиця значень t).

4 Увести **y (t)** = (на екран буде виведена таблиця значень y (t)).

Таблиці значень, що містять від 1 до 10 рядків даних, виводяться на екран повністю. У таблицях із кількістю рядків більше 10 на екран виводяться тільки перші 10 рядків. Для перегляду інших значень необхідно після виділення таблиці скористатися лінійкою прокручування. Вигляд документа MathCad:

$$t := -2, -1.5 \dots 2$$

$$y(t) := \sin(t) - \cos(t)$$

t =	y(t) =
-2	-0.493
-1.5	-1.068
-1	-1.382
-0.5	-1.357
0	-1
0.5	-0.398
1	0.301
1.5	0.927
2	1.325

4 Форматування результатів

Для того щоб установити формат виводу даних, необхідно:

1 Виділити таблицю, клацнувши по ній мишею.

2 Вибрати пункт меню *Format – Result / Формат - Результат*. Опції цього вікна дозволяють встановити кількість десяткових знаків у виведених числах (*Number of decimal places*), межі використання експоненційного зображення чисел (*Exponential threshold*) та ін.

3 За умовчанням для *Exponential threshold / Поріг показника* приймається значення 3. Це означає, що тільки числа, що більші або дорівнюють 10^2 , відображаються в експоненційному вигляді.

При зміні формату виведення результатів змінюється тільки їх зовнішній вигляд. Внутрішнє зображення чисел MathCad завжди має повну точність.

5 Побудова графіків функцій у декартовій системі координат

MathCad надає можливості побудови двовимірних графіків у декартових і полярних координатах, ліній рівня, зображення поверхні, а також побудови ряду інших тривимірних графіків.

Точки, з яких складається графік, визначаються дискретними аргументами: MathCad наносить на графік одну точку для кожного значення дискретного аргументу.

Для того щоб побудувати двовимірний графік у декартовій системі координат функції $y(t)$, необхідно:

1 Клацнути мишею нижче (правіше) формули для $y(t)$ і обрати *Graph Toolbar - X-Y Plot / Графік - X-Y залежність*: кнопка  або використати операційне меню *Insert - Graph - X-Y Plot/Вставка - Графік - X-Y залежність*. На екран буде виведений шаблон графіка (рис. В.2).

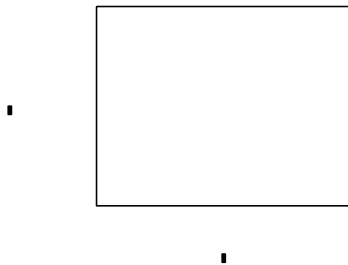


Рисунок В.2 – Шаблон задавання параметрів для побудови графіка

2 У полі введення під віссю абсцис потрібно ввести ім'я змінної t , поставивши, таким чином, у відповідність до цієї осі змінну t .

3 Клацнути в полі навпроти середини осі ординат і ввести ім'я функції з обов'язковою вказівкою її аргументу $y(t)$. Поля, що залишаються призначеними для введення меж на осях (максимального і мінімального значень, що відкладаються на осі). Якщо залишити їх порожніми, MathCad автоматично заповнить їх за умовчанням при побудові графіка.

4 Після клацання поза графіком відбувається процес його побудови. Під ім'ям функції $y(t)$ з'являється зразок креслення лінії. Подвійне клацання по вікну графіка чи використання *Format - Graph - X-Y Plot / Формат - Графік - X-Y залежність* дозволяє провести форматування зовнішнього вигляду графіка.

Діалогове вікно форматування графіка має чотири вкладки. Розглянемо дві з них (рис. В.3, В.4).

Склад вкладки *X-Y Axes* (рис. В.3):

Log scale – установка логарифмічного масштабу;

Grid lines – установка ліній масштабної сітки;

Numbered – установка цифрових даних по осях;

Auto scale – автоматичне завдання масштабу осей;

Show markers – нанесення рисок;

Auto grid – автоматична установка масштабних ліній;
Number of grids – установка числа масштабних ліній;
Boxed – рамка навколо графіка;
Crossed – пересічні осі;
None – відсутність осей;
Equal Scales – рівні масштаби.

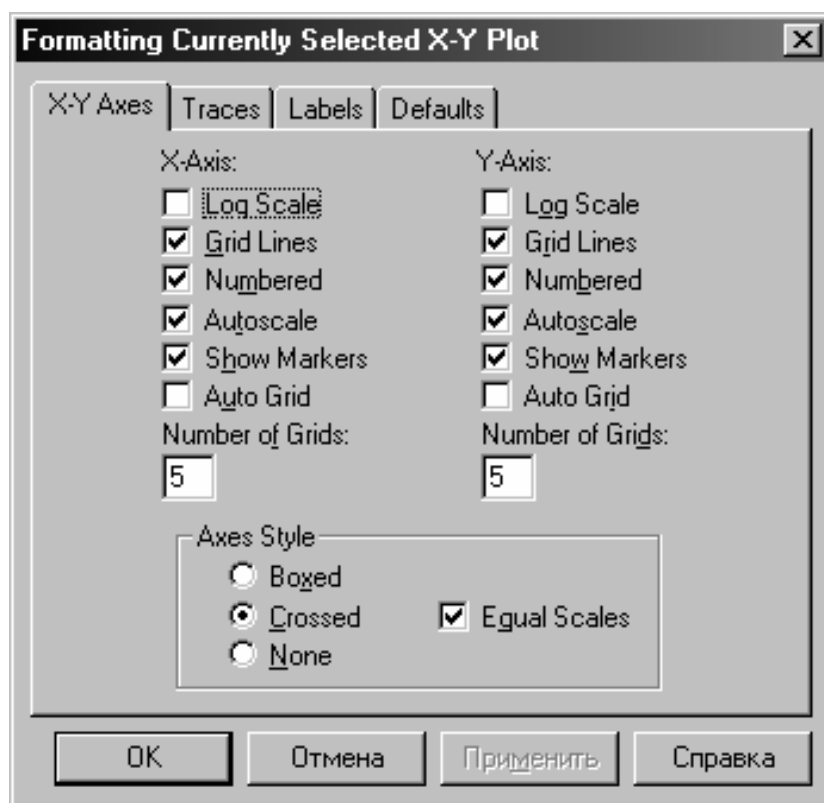


Рисунок В.3 – Вікно форматування графіків. Вкладка X-Y Axes

Мітки точок (*Symbol*), тип лінії (*Line*), колір (*Color*), товщину (*Weight*) і тип лінії (*Type*) графіка можна змінювати, використовуючи вкладку *Traces* вікна форматування графіка (рис. В.4).

На одному рисунку можна побудувати декілька графіків. У середній квадрат по вертикалі вписуються через коми всі імена функцій або їхні значення. Аналогічно в середній квадрат по горизонтальній осі заносяться аргументи функції (чи аргумент, якщо він один). Для побудови графіка необхідно клацнути мишею за його межами (або натиснути клавішу **F9**).

Виділивши поле графіка пунктирною лінією (клацнувши біля нього і протягнувши мишу, відпустити клавішу), можна потім перемістити на нього курсор, домогтися появи "долоньки" і, клацнувши, переміщати поле по робочому вікну. Для того, щоб розтягувати (звужувати) межі графіка, потрібно захопити курсором необхідну сторону і перемістити її.

Операції копіювання, видалення графіків відбуваються аналогічно діям з іншими об'єктами MathCad і описані раніше. Функції побудови необхідно визначати вище (ліворуч) від місця виведення макета.

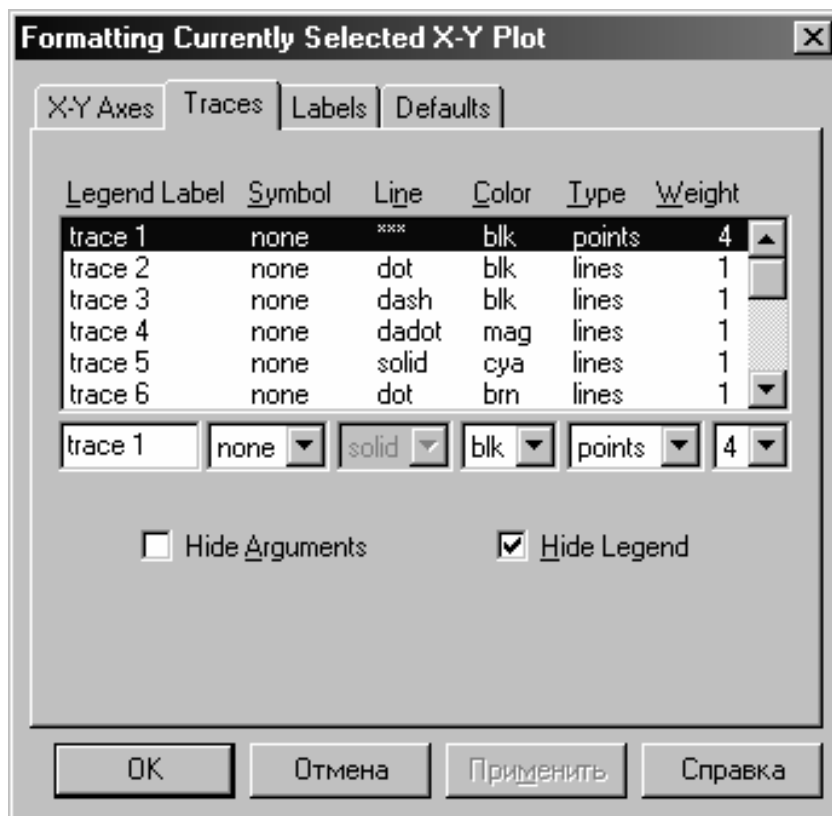


Рисунок В.4 – Вікно форматування графіків. Вкладка Traces

Приклад В.2

Побудувати графіки функцій $y(x) = 3 - \cos(x^2)$ і $f(t) = 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$ на відрізку $[0; \pi]$ з кроком зміни аргументу $\pi/64$.

Вигляд документа MathCad наведений на рисунку В.5.

$$x := 0, \frac{\pi}{64} .. \pi \quad t := 0, \frac{\pi}{64} .. \pi$$

$$y(x) := 3 - \cos(x^2) \quad f(t) := 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

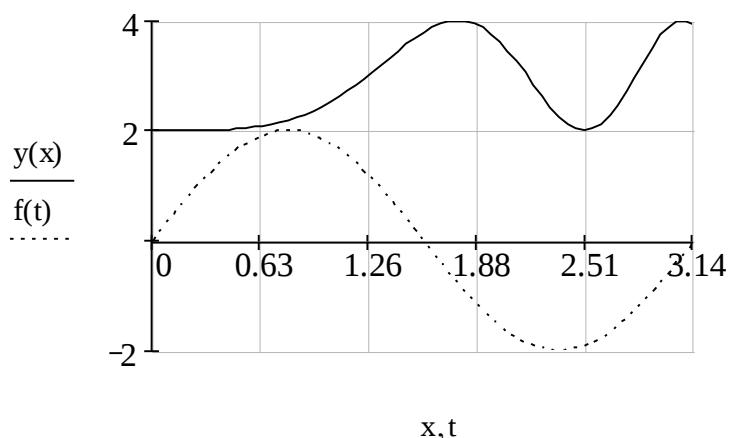


Рисунок В.5 – Результат побудови графіків функцій у заданому діапазоні зміни аргументу в декартовій системі координат

Точність відображення графіка функції залежить від кроку зміни аргументу: чим меншим буде крок, тим більш «гладким» – графік.

6 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 1

Розглянемо розв'язання задачі ЛП прикладу 2 з лабораторної роботи 1. Нехай необхідно знайти (x_1, x_2) , при яких функція $F = 2x_1 + x_2$ досягає максимуму, причому x_1, x_2 повинні задовольняти такій системі обмежень (СОБ):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 70, \\ 4x_1 - 5x_2 \geq -20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для того щоб розв'язати цю задачу в MathCad, треба виконати такі дії.

1 Записати цільову функцію:

$$F(x_1, x_2) := 2x_1 + x_2$$

2 Записати початкові значення змінних: $x_1 := 1$ $x_2 := 1$

3 Записати систему обмежень:

Given

$$x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$7x_1 + 10x_2 \leq 70$$

$$4x_1 - 5x_2 \geq -20$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

4 Записати функцію пошуку мінімуму:

$$\text{Maximize}(F, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4 Записати оператор для знаходження значення функції в знайдений точці:

$$F(10, 0) = 20 \blacksquare$$

Отримали відповідь у вигляді вектору, де $x_1 = 10$, $x_2 = 0$.

7 Графічне розв'язання задачі ЛП

У пакеті MathCad немає можливості розв'язувати графічно систему нерівностей. Але можна побудувати графіки відповідних рівнянь.

Для цього треба виразити x_2 через x_1 :

$$x_1 + 3x_2 \geq 6, \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{3}x_1,$$

$$7x_1 + 10x_2 \leq 70, \Rightarrow x_2 = 7 - \frac{7}{10}x_1,$$

$$4x_1 - 5x_2 \geq -20, \Rightarrow x_2 = 4 + \frac{4}{5}x_1.$$

Записуємо формули цих трьох прямих:

$$f1(x1) := 2 - \frac{1}{3} \cdot x1$$

$$f2(x1) := 7 - \frac{7}{10} \cdot x1$$

$$f3(x1) := 4 + \frac{4}{5} \cdot x1$$

Задаємо діапазон зміни для $x1$: $x1 := 0 .. 10$

Будуємо графік цих функцій (рис. В.6):

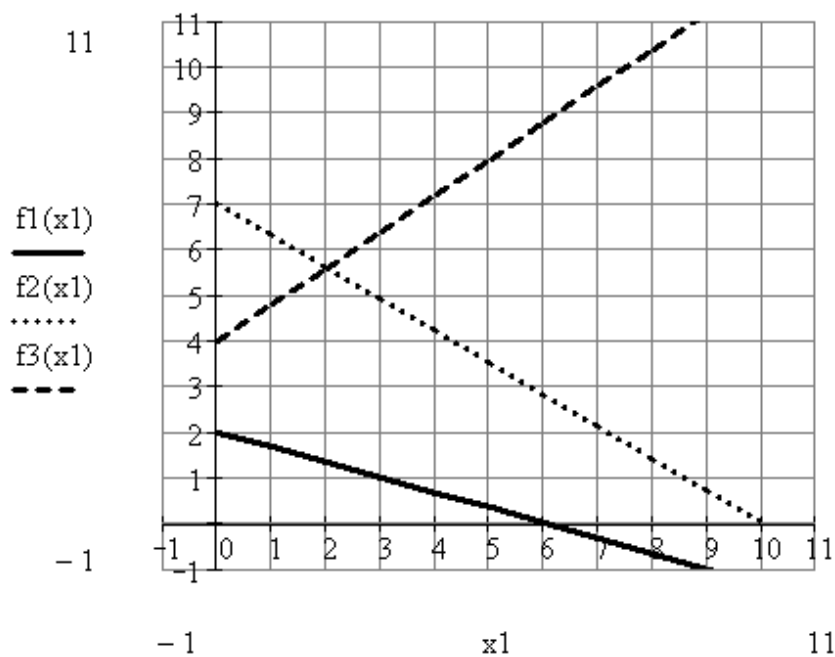


Рисунок В.6

Точку перетину функцій (2) і (3) можна знайти приблизно за допомогою опції *Trace...* з контекстного меню графіка (рис. В.7):

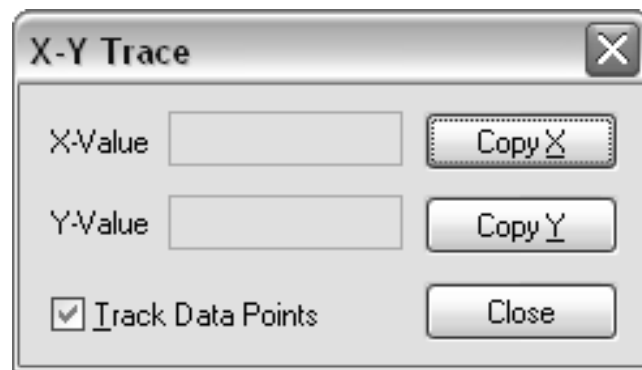


Рисунок В.7

Треба клацнути лівою кнопкою миші на потрібному місці графіка і у вікні *X-Y Trace* побачимо результат (рис. В.8):

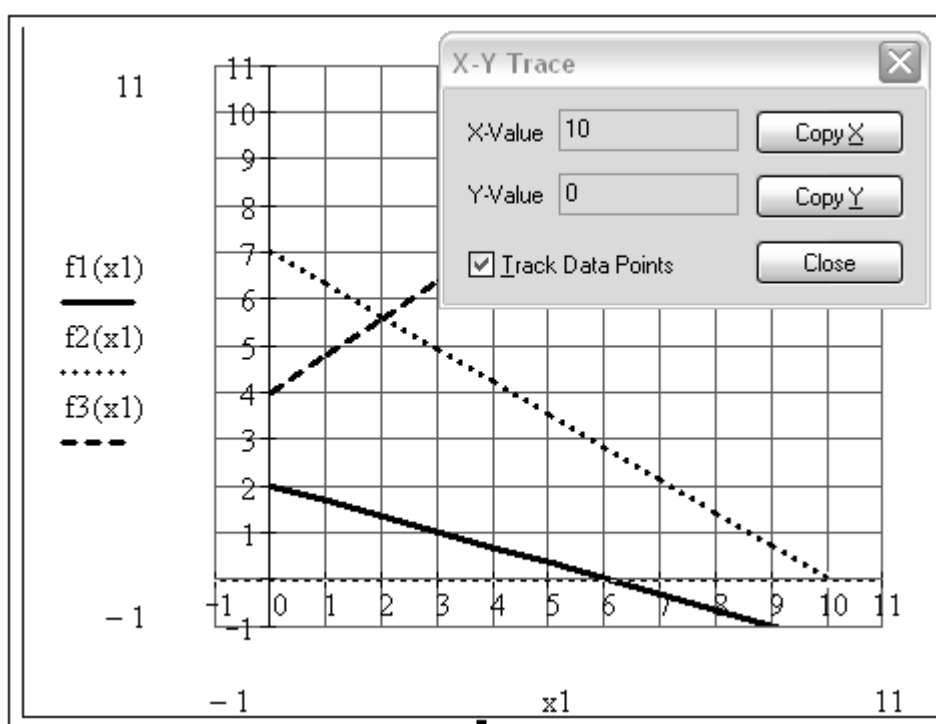


Рисунок В.8

8 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 2

Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовується три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції наведені в таблиці В.1.

Таблиця В.1

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Труд, люд.-год.	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, год.	1	2	5	244
Прибуток, гр. од.	10	14	12	-

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток буде максимальним.

$$F(x_1, x_2, x_3) := 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0 \quad x_3 := 0$$

Given

$$4x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 180$$

$$3x_1 + 1x_2 + 3x_3 \leq 210$$

$$1x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

$$\text{Maximize } (F, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 82 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Отримали відповідь у вигляді вектора, де $x_1 = 0$, $x_2 = 82$, $x_3 = 16$.
Значення функції у цій точці:

$$F(0, 82, 16) = 1340 \blacksquare$$

Двоїста задача

$$G = 180 y_1 + 210 y_2 + 244 y_3 \text{ (min).}$$

$$4 y_1 + 3 y_2 + y_3 \geq 10,$$

$$2 y_1 + y_2 + 2 y_3 \geq 14,$$

$$y_1 + 3 y_2 + 5 y_3 \geq 12,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Вигляд документа MathCad:

$$G(y_1, y_2, y_3) := 180 y_1 + 210 y_2 + 244 y_3$$

$$y_1 := 0 \quad y_2 := 0 \quad y_3 := 0$$

Given

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \quad y_3 \geq 0$$

$$\text{Minimize } (G, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 5.75 \\ 0 \\ 1.25 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$G(5.75, 0, 1.25) = 1340 \blacksquare$$

9 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 4

Розв'язання замкнутої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2, m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці В.2.

Таблиця В.2

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	100	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	150	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Вигляд документа MathCad:

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) := 4x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22}$$

$$x_{11} := 1 \quad x_{12} := 1 \quad x_{21} := 1 \quad x_{22} := 1$$

Given

$$x_{11} + x_{12} = 100$$

$$x_{21} + x_{22} = 150$$

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} = 130$$

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0$$

$$\text{Minimize}(F, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 120 \\ 30 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$F(0, 100, 120, 30) = 740 \blacksquare$$

Розв'язання двоїстої задачі

$$G = 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 \leq 4, \\ y_1 + y_4 \leq 2, \\ y_2 + y_3 \leq 3, \\ y_2 + y_4 \leq 6. \end{cases}$$

Вигляд документа MathCad:

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) := 100y_1 + 150y_2 + 120y_3 + 130y_4$$

$$y_1 := 1 \quad y_2 := 1 \quad y_3 := 1 \quad y_4 := 1$$

Given

$$y_1 + y_3 \leq 4$$

$$y_1 + y_4 \leq 2$$

$$y_2 + y_3 \leq 3$$

$$y_2 + y_4 \leq 6$$

$$\text{Maximize}(G, y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$G(2, 6, -3, 0) = 740 \blacksquare$$

Розв'язання відкритої транспортної задачі

Нехай число пунктів відправлення і число пунктів призначення дорівнює 2 ($n = 2, m = 2$). Запаси, потреби і вартість перевезень зазначені в таблиці В.3.

Таблиця В.3

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		В ₁		В ₂	
A ₁	120	x ₁₁	4	x ₁₂	2
A ₂	180	x ₁₂	3	x ₂₂	6
Потреби		120		130	

Вигляд документа MathCad:

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) := 4x_{11} + 2 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{21} + 6 \cdot x_{22}$$

$$x_{11} := 1 \quad x_{12} := 1 \quad x_{21} := 1 \quad x_{22} := 1$$

Given

$$x_{11} + x_{12} \leq 120$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180$$

$$x_{11} + x_{21} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} = 130$$

$$x_{11} \geq 0 \quad x_{12} \geq 0$$

$$x_{21} \geq 0 \quad x_{22} \geq 0$$

$$\text{Minimize}(F, x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 120 \\ 10 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$F(0, 120, 120, 10) = 660 \blacksquare$$

Розв'язання двоїстої задачі

$$G = -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4 \quad (\max).$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 4, \\ -y_1 + y_4 \leq 2, \\ -y_2 + y_3 \leq 3, \\ -y_2 + y_4 \leq 6, \end{cases} \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Вигляд документа MathCad:

$$G(y_1, y_2, y_3, y_4) := -120y_1 - 180y_2 + 120y_3 + 130y_4$$

$$y_1 := 1 \quad y_2 := 1 \quad y_3 := 1 \quad y_4 := 1$$

Given

$$-y_1 + y_3 \leq 4$$

$$-y_1 + y_4 \leq 2$$

$$-y_2 + y_3 \leq 3$$

$$-y_2 + y_4 \leq 6$$

$$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize}(G, y_1, y_2, y_3, y_4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \blacksquare$$

$$G(4, 0, 3, 6) = 660 \blacksquare$$

10 Приклад розв'язання задачі ЛП з лабораторної роботи 5

Задача 1

$$F = 7,62x_1 + 6,45x_2 \text{ (max);}$$

$$\begin{cases} 0,01x_1 + 0,2x_2 \leq 400, \\ 0,22x_1 + 0,15x_2 \leq 200, \\ x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Вигляд документа MathCad:

$$F(x_1, x_2) := 7.62x_1 + 6.45x_2$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

Given

$$0.01x_1 + 0.2x_2 \leq 400$$

$$0.22x_1 + 0.15x_2 \leq 200$$

$$x_1 - \frac{3}{4} \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 280$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize } (F, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 210 \\ 280 \end{pmatrix}$$

$$F(210, 280) = 3406.2$$

Задача 2

$$F = 5,66x_1 + 4,35x_2 \quad (\max);$$

$$\begin{cases} -0,22x_1 + 0,85x_2 \leq 50, \\ x_1 \leq 350, \\ x_2 \leq 280, \\ 0,9x_1 - 0,2x_2 \geq 0, \\ -0,22x_1 + 0,85x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вигляд документа MathCad:

$$F(x_1, x_2) := 5.66x_1 + 4.35x_2$$

$$x_1 := 1 \quad x_2 := 1$$

Given

$$-0.22x_1 + 0.85x_2 \leq 50$$

$$x_1 \leq 350$$

$$x_2 \leq 280$$

$$0.9x_1 - 0.2x_2 \geq 0$$

$$-0.22x_1 + 0.85x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

$$\text{Maximize } (F, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 350 \\ 149.412 \end{pmatrix}$$

$$F(350, 149.412) = 2630.942$$

11 Приклад розв'язання задачі НЛП з лабораторної роботи 6

Задача квадратичного програмування

$$\begin{cases} F = 9x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 & (\max), \\ x_1 + 4x_2 \leq 52, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 64. \end{cases}$$

Запис у MathCad

Пояснення

$f(x_1, x_2) := 9 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - x_1^2 - x_2^2$ - цільова функція,

$x_1 := 0$

- початкові значення змінних,

$x_2 := 0$

Given

- запис системи обмежень,

$x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 52$

$x_1 - x_2 \leq 2$

$7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 64$

$\text{Maximize } (f, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

- точка екстремуму,

$f(7, 5) = -1$

- значення функції в точці екстремуму,

$x_1 := 7$

- перевірка виконання системи

$x_2 := 5$

обмежень

$x_1 + 4 \cdot x_2 = 27$

$x_1 - x_2 = 2$

$7 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 64$

Примітка. У програмі **MathCad** можна розв'язати не всі оптимізаційні задачі. Так, наприклад, не вдалося знайти розв'язання для прикладу з лабораторної роботи 3. Це пов'язано з методами, вбудованими в програму.

ЛІТЕРАТУРА

- 1 Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие для экон. спец. вузов / Акулич И. Л. – М. : Высш. шк., 1986. – 317 с.
- 2 Банди, Б. Основы линейного программирования : пер. с англ. / Банди Б. – М. : Радио и связь, 1989. – 176 с.
- 3 Барвінський, А. Ф. Математичне програмування : навчальний посібник / А. Ф. Барвінський [та ін.] – Львів : Інтелект-Захід, 2004. – 448 с.
- 4 Вітлінський, В. В. Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І Наконечний, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.
- 5 Гасс, С. Линейное программирование (методы и приложения) / Гасс С. – М., 1961. – 305 с.
- 6 Глухов, В. В. Математические методы и модели для менеджмента / В. В. Глухов, М. Д. Медников, С. Б. Коробко. – СПб. : Лань, 2000. – 480 с.
- 7 Горчаков, А. А. Компьютерные экономико-математические модели / А. А. Горчаков, И. В. Орлова. – М. : Компьютер, 1995. – 135 с.
- 8 Горчаков, А. А. Методы экономико-математического моделирования и прогнозирования в новых условиях хозяйствования / А. А. Горчаков, И. В. Орлова, В. А. Плотников. – М. : ВЗВЭИ, 1991. – 181 с.
- 9 Данциг, Дж. Линейное программирование / Данциг Дж. – М., 1981. – 242 с.
- 10 Идрисов, Ф. Ф. Линейное программирование / Идрисов Ф. Ф. – Томск : Изд-во ТГПУ, 2004. – 124 с.
- 11 Каллихман, И. Л. Сборник задач по математическому программированию / Каллихман И. Л. – М. : Высш. школа, 1975. – 270 с.
- 12 Карасев, А. И. Математические методы и модели в планировании / Карасев А. И. – М. : Экономика, 1987. – 221 с.
- 13 Коробов, П. Н. Математическое программирование и моделирование процессов : ученик / Коробов П. Н. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб : ДНК, 2003. – 376 с.
- 14 Костевич, Л. Математическое программирование / Костевич Л. – М. : Новое знание, 2003. – 424 с.
- 15 Кузнецов, А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск : Высшейш. школа, 1984. – 221 с.
- 16 Куликов, Ю. Г. Экономико-математические методы и модели (раздел «Линейное программирование») : учебное пособие для практ. занятий / Ю. Г. Куликов, Н. Ф. Шеховцова, Л. П. Зикеева. – М. : Мос. психолог.-социальный ин-т ; Воронеж : МОДЭК, 2000. – 96 с.
- 17 Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы : пер. с фр. / Мину М. – М. : Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1990. – 488 с.

- 18 Плис А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
- 19 Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование. – М.: Просвещение, 1966. – 184 с
- 20 Степанюк В. В. Методи математичного програмування. – К.: Вища школа, Головне в-во, 1984. – 272 с.
- 21 Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т. 1: Пер с англ. – М.: Мир, 1991. – 360 с.
- 22 Тынкевич М. А. Экономико-математические методы (исследование операций). – Изд. 2-е, испр. и доп. – Кемерово, 2000. – 177 с.
- 23 Федосеев В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ., 2002. – 391 с.
- 24 Шмырев В. И. Введение в математическое программирование. – М.: РХД, 2002. – 192 с.

Навчальне видання

**ВАСИЛЬЄВА Людмила Володимирівна,
ГЕТЬМАН Ірина Анатоліївна**

**ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ
В ЕКОНОМІЦІ**

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Редактор О. М. Болкова

Комп'ютерна верстка О. С. Орда

36/2006. Підп. до друку 26.09.2011. Формат 60 x 84/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 11,63. Обл.-вид. арк. 8,46.
Тираж 40 прим. Зам. № 108.

Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Шкадінова, 72.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК №1633 від 24.12.2003